Auxiliar 7

1. Ceros : $Z(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$
(Intersección con OX)

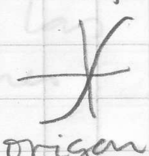
2. Recorrido : $Rec(f) = f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}$
(Imagen)

3. Creciente : $(\forall x_1, x_2 \in B)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
(Estricta $<$) $B \subseteq A$

4. Decreciente : $(\forall x_1, x_2 \in B)\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
(Estricta $>$)

5. Par $(\forall x \in A, -x \in A)$ $f(-x) = x$ se come signo $|x|$

6. Impar $(\forall x \in A, -x \in A)$ $f(-x) = -x$ bota el signo



7. Acotamiento :

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in Dom(f) \quad |f(x)| \leq M$$

8. Inyectividad : $(\forall x_1, x_2 \in A)\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

"A los elementos de B (Imagen) les corresponde un único elemento de A" Uno a uno !

9. Sobreyectividad : $(\forall y \in B)\ (\exists x \in A)\quad y = f(x)$

"<u>Todo</u> elemento de B es imagen de al menos un elemento de A"

Problema: Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

Se pide determinar:

a) Dominio, paridad, ceros, signos, conjunto imagen y asíntotas.

b) ¿En qué intervalos esta función es creciente y en cuáles decreciente?

c) Bosquejar el gráfico de f.

Solución:

a) ① Para ver el dominio de la función debemos saber para cuáles "x" está bien definida f(x) y, por ende, para cuáles "x" se indefine.

Tenemos $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ que es una fracción,

Solo se indefine cuando el denominador se hace cero, lo que ocurre cuando:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x=1 \vee x=-1$$

Por lo tanto f(x) está definida para todos los números reales menos $\{-1,1\}$.

$\therefore$ $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$

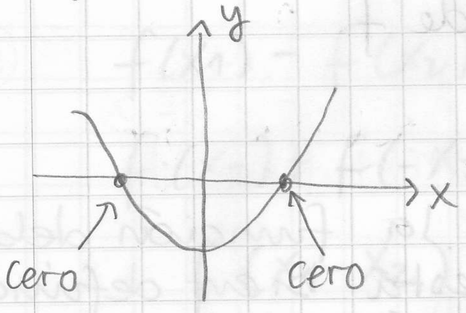
② Paridad: Para ver si la función es par o impar debemos evaluar f(x) en $-x$.

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2-1} = \frac{x^2}{x^2-1} = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x)$$

$\therefore$ $f(x)$ es una función par.

③ Ceros: Buscamos los "x" que cumplen $f(x)=0$ (cortan el eje horizontal).



$$f(x) = 0$$

Reemplazamos $f(x)$ por $\frac{x^2}{x^2-1}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x^2-1} = 0$$

como estamos tomando $x \in Dom(f)$, entonces $x^2-1 \neq 0$ y podemos simplificarlo, queda:

$$x^2 = 0 \Rightarrow \underline{x=0}|$$

$\therefore$ El único cero de $f(x)$ es $x=0$.

④ Signo: Tomamos los <u>puntos de indefinición</u> para dividir el dominio y ver si la función es positiva o negativa en los intervalos:

$x \in (-\infty, -1)$ $\quad f(x) > 0 \quad (1)$
$x \in (-1, 1)$ $\quad f(x) < 0 \quad (2)$
$x \in (1, \infty)$ $\quad f(x) > 0 \quad (3)$

(1) Para ver si $f(x) \gtrless 0$ tomamos un punto en $(-\infty, -1)$ y lo evaluamos en $f(x)$. Elegimos $x = -2$, entonces:

$$f(-2) = \frac{(-2)^2}{(-2)^2 - 1} = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3} > 0$$

$$\Rightarrow f(x) > 0$$

no podemos tomar $x=0$ porque $f(0)=0$

(2) Tomamos $x = \frac{1}{2} \in (-1, 1)$, entonces:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{\frac{1}{\cancel{4}}}{\frac{-3}{\cancel{4}}} = -\frac{1}{3} < 0$$

$$\Rightarrow f(x) < 0$$

(3) Tomamos $x = 2 \in (1, \infty)$, entonces:

$$f(2) = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3} > 0$$

$$\Rightarrow f(x) > 0$$

⑤ Asíntotas: Verticales: ver para que "x" $f(x) \to \infty$

Horizontales: ver que pasa con $f(x)$ cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$

Sabemos de (1) que $f(x)$ se indefine (es decir $f(x) \to \infty$) cuando $x=-1$ y $x=1$.

$\therefore$ Asíntotas verticales: $x=-1 \wedge x=1$

Veamos si hay asíntotas horizontales, ¿Qué pasa con $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$?

$$f(x\to\infty) = f(x\to-\infty)$$ porque f es par

$$= \frac{(\text{n° muy grande})^2}{(\text{n° muy grande})^2-1}$$

$$f(x) = \underline{1}$$

$\therefore$ Asíntota horizontal $y=f(x)=1$

(6) Conjunto imagen: Despejamos x.

$$y = \frac{x^2}{x^2-1}$$

$$yx^2 - y = x^2$$

$$x^2(y-1) = y$$

$$x^2 = \frac{y}{y-1} \quad /\sqrt{\ }$$

$$|x| = \sqrt{\frac{y}{y-1}}$$

$\Rightarrow y \neq 1$

$\Rightarrow \frac{y}{y-1} \geq 0$

cuando $y<0$ tenemos

$y-1<0$

$y<1$ pero $y<0$

$\Rightarrow \boxed{y<0}$

cuando $y>0$ tenemos

$y-1>0$

$\boxed{y>1}$

∴ Cuando $y > 0$, debemos tener $y > 1$, pero $y \neq 1$, y además $y < 0$.

$\Rightarrow Im(f) = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

b) Crecimiento: Como la función es par veremos solo el lado positivo y luego la reflejaremos respecto al eje vertical (como un espejo).

Sea $x_1, x_2 \in Dom(f)$ tales que $x_2 > x_1$ y $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$. Queremos ver si $f(x)$ es creciente o no. Transformamos $f(x)$ en algo más "amigable".

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2+1-1}{x^2-1} = \frac{(x^2-1)}{(x^2-1)} + \frac{1}{x^2-1}$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x^2-1}$$

Entonces partimos de la hipotesis: $x_2 > x_1$

$$x_2 > x_1 \quad /()^2$$

$$(x_2)^2 > (x_1)^2 \quad /-1$$

$$(x_2)^2 - 1 > (x_1)^2 - 1 \quad /()^{-1}$$

$$\frac{1}{(x_2)^2-1} < \frac{1}{(x_1)^2-1} \quad /+1$$

$$1 + \frac{1}{(x_2)^2 - 1} < 1 + \frac{1}{(x_1)^2 - 1}$$

$$f(x_2) < f(x_1)$$

$\therefore$ $f(x)$ es decreciente en $(0, +\infty)$

como f es par $\Rightarrow$ f es creciente en $(-\infty, 0)$

(c)