Pauta P1 Control 1

P1. La sucesión de Fibonacci es una sucesión en que cada término es igual a la suma de los dos términos anteriores a él. Es decir, partiendo de $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ se puede construir cualquier término de la forma:

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \qquad \forall k \geq 2$$

Se pide demostrar lo siguiente:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$

(b) $F_n > (\frac{3}{2})^{n-1}, \qquad \forall n \geq 6$

P1.(a) Debemos demostrar que: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1 \qquad (*)$

Para ello vamos a ocupar inducción débil, que es la que usualmente ocupamos en clases.

Primero debemos demostrar que $(*)$ sirve para el caso base $n = 1$, luego debemos proponer la hipótesis inductiva suponiendo que $(*)$ se cumple para algún término $n-$ésimo de la sucesión y finalmente debemos probar, usando la hipótesis, que $(*)$ también se cumple para el término $n + 1$ de la suceción de Fibonacci.

C.B. Como nos definen la sucesión de Fibonacci desde cero podríamos ocupar el caso base $n = 0$, pero no podemos porque lo que debemos demostrar es una sumatoria que parte desde $k = 1$ y llega hasta n, si escogieramos $n = 0$ estaríamos sumando desde 1 hasta 0 lo que no tiene sentido en nuestra definición de sumatoria. Por lo tanto, escogemos el siguiente número natural de caso base, es decir, tomamos caso base para $n = 1$.

Reemplazamos $n = 1$ en ambos lados de la proposición $(*)$ para ver si se cumplen que son lo mismo.

Lado izquierdo: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F_k = \sum_{k=1}^{1} F_k = F_1 = 1$

Lado derecho: $F_{n+2} - 1 = F_{1+2} - 1 = F_3 - 1$ (1)

Como no conocemos F_3 debemos sacarlo con la definición que nos dan de la sucesión de Fibonacci:

$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ para k= 3 $\Rightarrow F_3 = F_{3-1} + F_{3-2} \Rightarrow F_3 = F_2 + F_1$ (2)

pero nos dicen en el enunciado que $F_1 = 1$, entonces solo nos falta sacar F_2 para obtener F_3. Sacamos F_2 aplicando también la definición de Fibonacci:

$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ para k= 2 $\Rightarrow F_2 = F_{2-1} + F_{2-2} \Rightarrow F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$

Reemplazamos F_2 en (2) y obtenemos $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$, reemplazamos F_3 en (1) y queda:

$F_{n+2} - 1 = F_{1+2} - 1 = F_3 - 1 = 2 - 1 = 1$ (Lado derecho)

Por lo tanto, el lado izquierdo es igual al lado derecho para $n = 1$, por lo que queda demostrado $(*)$ para el caso base.

H.I. Suponemos que $(*)$ es cierto para algún $n \geq 1$, es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$$

P.I. Debemos demostrar, usando H.I, que:

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_k = F_{n+3} - 1$$

Para demostrar esta igualdad partimos del lado izquierdo para llegar al derecho.

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_k = \sum_{k=1}^{n} F_k + F_{n+1}$$

Hemos separado la suma hasta $n+1$ en una suma hasta n más el término $k = n+1$. Ahora vemos que tenemos la parte izquierda de la H.I. por lo que podemos reemplazarla.

$$= F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+2} + F_{n+1} - 1 \qquad (3)$$

Recordamos la definición de los términos de la sucesión $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, tomando $k = n+3$ tenemos $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1}$, reemplazamos eso en la expresión (3)

$$= F_{n+2} + F_{n+1} - 1 = F_{n+3} - 1$$

Con lo que hemos llegado al resultado que buscabamos, es decir, hemos probado que:

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_k = F_{n+3} - 1$$

Con esto hemos probado que si $(*)$ funciona para el término n-ésimo de la sucesión, entonces también funciona para el término $(n+1)$-ésimo.

Conclusión: Por lo tanto, hemos demostrado por inducción que $\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ es cierto $\forall n \geq 1$.

P1.(b) Resolveremos este problema usando inducción fuerte, para aprovechar el hecho de que la sucesión es recursiva (hay términos anteriores que podemos ocupar).

C.B. En esta parte nos dicen cuál es el n del caso base, ya que nos piden que demostremos algo para $n \geq 6$. Entonces tomamos como caso base $n = 6$. Tomamos ambos lados de la desigualdad que piden que demostremos: $F_n > (\frac{3}{2})^{n-1}$ $\quad(**)$ y vemos si cumplen la relación "mayor que"($>$).

Lado izquierdo: F_n para $n = 6$, usando la definición de la sucesión, queda $F_6 = F_5 + F_4$. Debemos sacar F_5 y F_4 de la misma forma que ocupamos para el caso base de la parte (a). Si seguimos esos pasos nos da: $F_5 = 5$ y $F_4 = 3$ por lo que $F_6 = 5 + 3 = 8$

Lado derecho: $(\frac{3}{2})^{n-1}$ para $n = 6$ queda $(\frac{3}{2})^{6-1} = (\frac{3}{2})^5 = (\frac{3^5}{2^5}) = \frac{243}{32} = 7{,}6$

Podemos ver que, en efecto, el lado izquierdo es mayor que el derecho para $n = 6$ ya que $8 > 7{,}6$ es decir,

$$F_n > (\frac{3}{2})^{n-1}$$

se cumple para el caso base.

H.I. Suponemos que $(**)$ se cumple para algún $n \geq 6$ y para todos los términos con m tal que $n \geq m \geq 6$, es decir, suponemos que se cumplen: $F_n > (\frac{3}{2})^{n-1}$ y $F_m > (\frac{3}{2})^{m-1}$ siendo m algún número entre 6 y n.

P.I. Debemos demostrar, usando H.I, que:

$$F_{n+1} > (\frac{3}{2})^n$$

Partiremos del lado izquierdo y buscaremos cosas que sean menores para llegar a la desigualdad pedida.

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ por defición de la sucesión.

Además, por H.I. sabemos que $(**)$ se cumple para todos los m entre 6 y n, si tomamos $m = n-1$ (que está entre 6 y n), entonces tenemos que se cumple por hipótesis: $F_{n-1} > (\frac{3}{2})^{n-2}$ y aparte tenemos la hipótesis para n: $F_n > (\frac{3}{2})^{n-1}$. Por lo tanto,

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} > (\frac{3}{2})^{n-1} + (\frac{3}{2})^{n-2} = (\frac{3}{2})^n \, ((\frac{3}{2})^{-1} + (\frac{3}{2})^{-2}) = (\frac{3}{2})^n \, \frac{10}{9} > (\frac{3}{2})^n$

Esta última desigualdad se cumple porque $\frac{10}{9} > 1$.

Finalmente queda: $F_{n+1} > (\frac{3}{2})^n$ que era justamente lo que buscabamos. Entonces hemos probado que si $(**)$ se cumple para los términos de la sucesión con m entre 6 y n, entonces también se cumple para el término $(n+1)$-ésimo.

Con esto hemos demostrado por inducción fuerte que $F_n > (\frac{3}{2})^{n-1}$ es cierto para todo $n \geq 6$.