Índice general

MÓDULO 1

Lógica y Conjuntos

PARTE 1.1

Lógica

Definición 1.1 (Proposiciones)**.** En un intento por sistematizar el razonamiento matemático nace lo que llamaremos lógica. En lógica se trabaja con frases o expresiones con "valor de verdad" que son las llamadas **proposiciones**, estas pueden ser Falsas o Verdaderas, y normalmente las denotaremos por las letras p, q, r.... También veremos que es posible "conectar" proposiciones para construir otras nuevas, a estas les llamaremos proposiciones compuestas.

Ejemplo:

- p:" La pizarra es negra".
- q:" Este es el curso Matemáticas III".
- $r :\ 3 \geq 1$
- s :"Es temprano".
- t: "Tengo sueño".
- u :"Está nublado".
- v :"Está lloviendo".

1.1.1. Proposiciones

Definición 1.2. Negación: Dada una proposición p es natural definir la proposición opuesta, es decir su negación, por ejemplo para la proposición "Está lloviendo", su negación será "No está lloviendo", de manera que si una proposición es verdadera, entonces su negación tendrá valor de verdad falso, de esta misma manera, si la proposición es falsa, entonces su negación será verdadera. La negación de la proposición p la denotaremos como $\sim p$ [1] y se lee como "no p".

1.1.2. Conectivos lógicos

Tablas de verdad

Utilizaremos las **tablas de verdad** para representar los valores de verdad que tomará una proposición compuesta, en función de todos los posibles valores de verdad que pueden tomar las proposiciones en juego, por ejemplo:

Tabla de verdad de la negación

p	$\sim p$
V	F
F	V

Notemos que a medida que la cantidad de proposiciones en juego aumenta, el tamaño de la tabla de verdad es tan grande como 2^n, donde n es el número de proposiciones.

Una variable proposicional (p)

p
V
F

Dos variables proposicionales (p, q)

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Tres variables proposicionales (p, q, r)

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Definición 1.3. Y lógico o de conjunción:Dada dos proposiciones p y q, podemos construir la proposición $p \wedge q$ que se lee "p y q", esta proposición será verdadera siempre y cuando ambas proposiciones son verdaderas de manera simultánea, por ejemplo, a partir de las proposiciones "Está lloviendo" y "Tengo hambre", podemos formar la proposición "Está lloviendo y tengo hambre" que será verdadera, siempre y cuando ambas proposiciones sean verdaderas.

Tabla de verdad

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Definición 1.4. O lógico o disyunción:Dada dos proposiciones p y q, podemos construir la proposición $p \vee q$ que se lee "p o q", esta proposición será verdadera solo si al menos una de las proposiciones, ya sea p o q o ambas son verdaderas, por ejemplo, a partir de las proposiciones "Está lloviendo" y "Tengo hambre", podemos formar la proposición "Está lloviendo o tengo hambre", para que esta proposición sea verdadera basta que al menos una de las dos, ya sea "Está lloviendo" o "Tengo hambre" sea verdadera.

Tabla de verdad

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Definición 1.5. Implicación:Dada dos proposiciones p y q, podemos construir la proposición $p \Rightarrow q$ y se lee "p implica q" también se lee como "si p, entonces q", que trata de representar que cada vez que p es verdadera, q obligatoriamente debe ser verdadera también, para estudiar su valor de verdad, notaremos que la única forma en que se puede asegurar que la proposición es falsa es cuando p es verdadera y q es falsa, por ejemplo, es fácil convencerse que la proposición "Si esta lloviendo, entonces está nublado" es verdadera, además no es importante si no esta lloviendo, lo único que importa es que, si efectivamente está lloviendo, entonces necesariamente está nublado, por lo tanto no puede ocurrir que esté lloviendo y no esté nublado.

Tabla de verdad

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observación 1.1. Notar que la clave de la tabla de verdad de $p \Rightarrow q$ es la segunda fila, se sabe que $p \Rightarrow q$ será falso cuando p sea verdadero y q falso.

Definición 1.6. Equivalencia:Dada dos proposiciones p y q, la proposición[2] $p \Leftrightarrow q$ y se lee "p es equivalente q"también se lee como "p si y solo si q", será verdadera siempre y cuando p y q tengan exactamente el mismo valor de verdad.

Tabla de verdad

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Observación 1.2. Dos proposiciones se dicen **siempre equivalentes** si tienen la misma tabla de verdad.

Ejemplo:

- Demostrar que $p \Rightarrow q$ es equivalente a $(\sim p) \vee q$

p	q	$(\sim p)$	$(\sim p) \vee q$	$p \Rightarrow q$	$((\sim p) \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Como las tablas de verdad son iguales, entonces son equivalentes.

- Demostrar que $p \Rightarrow q$ es equivalente a $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$

p	q	$(\sim p)$	$(\sim q)$	$(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$	$p \Rightarrow q$	$[(\sim q) \Rightarrow (\sim p)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Como las tablas de verdad son iguales, entonces son equivalentes.

Definición 1.7 (Tautología)**.** Se dice que una proposición es una **tautología** si su tabla de verdad es verdadera para todos los casos.

1.1.3. Tautologías

Observación 1.3. Dos proposiciones A y B son equivalentes si la proposición $A \Leftrightarrow B$ es una tautología (ver el ejemplo anterior).

Ejemplo:

- Tabla de verdad de la proposición $(\sim p) \wedge (\sim q)$

p	q	$(\sim p)$	$(\sim q)$	$(\sim q) \wedge (\sim p)$	$\sim (p \vee q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

- Tabla de verdad de la proposición $(\sim p) \vee (\sim q)$

p	q	$(\sim p)$	$(\sim q)$	$(\sim q) \vee (\sim p)$	$\sim (p \vee q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V

Notar que:
$(\sim q) \wedge (\sim p) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$
$(\sim q) \vee (\sim p) \not\Leftrightarrow \sim (p \vee q)$

Ejemplo:

Demostrar que $p \Leftrightarrow q$ es equivalente a $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
V	V	V	V	V
F	V	F	F	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V

Se tiene ya que $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ es una tautología.

Proposición 1.8 (Tautologías básicas)**.** *Sean p,q y r proposiciones lógicas, se tiene que:*

1. *Idempotencia:*
   - $p \wedge p \Leftrightarrow p$
   - $p \vee p \Leftrightarrow p$
2. - $p \vee F \Leftrightarrow p$
   - $p \wedge F \Leftrightarrow F$
3. - $p \vee V \Leftrightarrow V$
   - $p \wedge V \Leftrightarrow p$
4. - $p \vee \sim p \Leftrightarrow V$
   - $p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$
5. *Conmutatividad:*
   - $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
   - $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
6. *Asociatividad:*
   - $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
   - $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
7. *Dsitributividad:*
   - $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   - $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
8. *De Morgan:*
   - $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$
   - $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$
9. $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$
10. - $p \wedge q \Rightarrow p$
    - $p \Rightarrow p \vee q$
11. *Reflexividad:*
    - $p \Rightarrow p$
    - $p \Leftrightarrow p$
12. *Simetría de la equivalencia:* $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$
13. *Caracterización del implica:* $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee q$
14. *Contrarecíproca* $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$

15. *Caracterización de la equivalencia:* $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
16. *Transitividad:*
    - $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
    - $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$
17. $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge (\sim q))$

DEMOSTRACIÓN. Estas tautologías se prueban usando tablas de verdad, y las cuatro últimas son particularmente útiles para demostrar teoremas. □

Métodos de verificación de Tautologías

Además de las tablas de verdad existen otros métodos para determinar si una proposición es una tautología, estos pueden ser mucho más efectivos que las tablas de verdad (basta pensar en una tabla de verdad cuando hay cuatro o más proposiciones en juego).

Método 1

Podemos verificar de manera algebraica asumiendo las tautologías básicas como conocidas[3], aquí se utilizará fuertemente la transitividad de la equivalencia, de manera que armemos una cadena de equivalencias hasta llegar a lo que buscamos.

Ejemplo:

Demostrar que:

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)] \vee (p \wedge q)$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{array}{rccc}
TB15 & (p \Leftrightarrow q) & \Leftrightarrow & [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \\
TB13 & & \Leftrightarrow & ((\sim p) \vee q) \wedge ((\sim q) \vee p) \\
TB7 & & \Leftrightarrow & [(\sim p) \vee q) \wedge (\sim q)] \vee [(\sim p) \vee q) \wedge p] \\
TB7 & & \Leftrightarrow & [(\sim p) \wedge (\sim q)] \vee [q \wedge (\sim q)] \vee [(\sim p) \wedge p] \vee (q \wedge p) \\
TB4,2 & & \Leftrightarrow & [(\sim p) \wedge (\sim q)] \vee (q \wedge p) \\
TB16 & & \Leftrightarrow & [(\sim p) \wedge (\sim q)] \vee (q \wedge p)
\end{array}$$

□

Método 2

En estas demostraciones se acepta explorar la tabla de verdad de la proposición, desechando los casos "fáciles".

Ejemplo:

[3]Es decir podemos usarlas sin demostrarlas. Cada vez que se usen y sea necesario recalcarlo se llamarán como TBn , donde n es el número asignado a la tautologia básica en este apunte.

Demostrar que la siguiente proposición es una tautología:

$$[(p \Rightarrow (\sim q)) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow (\sim r))$$

Llamaremos $A \Leftrightarrow [(p \Rightarrow (\sim q)) \wedge (r \Rightarrow q)]$ y $B \Leftrightarrow (p \Rightarrow (\sim r))$, la proposición es $A \Rightarrow B$ los casos fáciles son cuando el valor de A es F, ya que la proposición se hace verdadera, el caso interesante es qué pasa si A es verdadera, y lo que queremos concluir es que B es verdadera.

Si $A \Leftrightarrow [(p \Rightarrow (\sim q)) \wedge (r \Rightarrow q)]$ es verdadera entonces tenemos que:

- $(p \Rightarrow (\sim q)) \Leftrightarrow V$
- $(r \Rightarrow q) \Leftrightarrow V$

Por otro lado para concluir que $B \Leftrightarrow (p \Rightarrow (\sim r))$ basta analizar el caso en que el valor de verdad de p es verdadero. Por lo tanto tenemos que si $p \Leftrightarrow V$, entonces:

- $$\begin{array}{ccc} (p \Rightarrow (\sim q)) \Leftrightarrow V & \Rightarrow & (V \Rightarrow (\sim q)) \Leftrightarrow V \\ TB13 & \Rightarrow & (F \vee (\sim q)) \Leftrightarrow V \\ TB3 & \Rightarrow & (\sim q) \Leftrightarrow V \\ & \Rightarrow & q \Leftrightarrow F \end{array}$$
- $$\begin{array}{ccc} (r \Rightarrow q) \Leftrightarrow V & \Rightarrow & (r \Rightarrow F) \Leftrightarrow V \\ & \Rightarrow & r \Leftrightarrow F \end{array}$$

Con lo que B $\Leftrightarrow (p \Rightarrow (\sim r)) \Leftrightarrow (V \Rightarrow V) \Leftrightarrow V$, con esto queda demostrado que la proposición es una tautología.

Método 3 (Reducción al absurdo)

Este método se aplica óptimamente en una proposición de la forma $A \Rightarrow B$ y usando el hecho que $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge (\sim q))$. La idea es suponer que la negación es verdadera y concluir que esto no puede ser.

Ejemplo:

Demostrar vía reducción al absurdo que la siguiente proposición es una tautología:

$$[(p \Rightarrow (\sim q)) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow (\sim r))$$

Supongamos que $[(p \Rightarrow (\sim q)) \wedge (r \Rightarrow q)] \wedge [\sim (p \Rightarrow (\sim r))]$ es verdadera. Se tiene que:

- $[(p \Rightarrow (\sim q)) \wedge (r \Rightarrow q)] \Leftrightarrow V$
  Con lo que:
  - $A \Leftrightarrow (p \Rightarrow (\sim q)) \Leftrightarrow V$
  - $B \Leftrightarrow (r \Rightarrow q) \Leftrightarrow V$
- $([\sim (p \Rightarrow (\sim r))] \Leftrightarrow V) \Leftrightarrow ([(p \Rightarrow (\sim r))] \Leftrightarrow F)$

Como $[(p \Rightarrow (\sim r))] \Leftrightarrow F$, entonces $p \Leftrightarrow V$ y $r \Leftrightarrow V$, con esto, como $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow V$, si q es verdadero entonces A es falso, y si q es falso, entonces B es falso, luego q no puede ser ni verdadero ni falso, lo que es una **contradiccón**, en consecuencia la proposición es una tautología, puesto que su negación no puede ser verdadera.

Más aun el método de reducción al absurdo es un método general de demostración, basado en la contrarecíproca, la idea es que se quiere demostrar una cierta propiedad Q, lo que vemos como

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow Q$$

Donde $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n$ corresponden a las hipótesis y todo lo que conocemos en matemáticas, lo que sabemos que es verdad. Esto es lo mismo que

$$\sim Q \Rightarrow \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \sim p_3 \vee \ldots \vee \sim p_n$$

Entonces se parte de $\sim Q$ (se supone falso lo que se quiere probar) y se llega a $\sim p_i$, lo cual es una "contradicción", algo que sabemos que es falso, con lo que

$$\sim Q \Rightarrow F$$

Luego se concluye Q.

Ejemplo:

Probaremos que no hay ningún racional cuyo cuadrado es 2 (o equivalentemente, $\sqrt{2}$ no es racional), donde los racionales son los números reales que se pueden expresar como una fracción.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos por contradicción que existe un racional cuyo cuadrado es 2, o sea existen m, n números enteros con $n \neq 0$ tal que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Además podemos suponer que m y n son coprimos[4].
Luego se tiene que: $\Rightarrow m^2 = 2n^2$
$\Rightarrow m^2$ es par, por lo tanto m es par, luego remplazamos $m = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow (2k)^2 = 2n^2$
$\Rightarrow 4k^2 = 2n^2$
$\Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow n^2$ es par, entonces n es par $(n = 2j,\ j$ algún entero $)$.
Luego 2 es factor común de m y n pero habíamos supuesto que no tenían factores en común, lo que lleva a una contradicción, por lo tanto no existen m, n enteros tal que $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$.

□

Definición 1.9 (Función proposicional)**.** La proposición $p(x) \Leftrightarrow x > 3$ no es una proposición estrictamente, para que lo sea se le debe dar valores a x, a este tipo de proposiciones[5] se les llama **proposiciones abiertas** o **funciones proposicionales**.

Ejemplo:

Algunas proposiciones abiertas:

- $p(x) \Leftrightarrow$ "x es mujer".
- $q(x) \Leftrightarrow x = 4$.
- $r(x) \Leftrightarrow$ "y es múltiplo de 3".
- $s(x,y) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$.
- $t(x,y,z,n) \Leftrightarrow x^n + y^n = z^n$.

Definición 1.10 (Cuantificador Universal)**.** Si bien $p(x) \Leftrightarrow$ "x es mujer" es una proposición abierta, si la cambiamos por " todos los x de esta sala son mujeres" obtiene una proposición, esto es lo que se conoce como **cuantificador universal**, en general se escribe como $(\forall x)\ p(x)$. y se lee como "para todo x, $p(x)$".

Ejemplo:

Algunas proposiciones que usan el cuantificador universal.

- La proposición $(\forall x)\ x = 4$, es falsa ya que $3 \neq 4$.
- La proposición $(\forall y)\ y$ es múltiplo de 3, es falsa ya que 5 no es múltiplo de 3.
- La proposición $(\forall x)\ x = x$, es verdadera.

Definición 1.11 (Cuantificador Existencial)**.** Siguiendo con el ejemplo anterior $p(x) \Leftrightarrow$ "x es mujer", otra manera de definir una proposición a partir de una proposición abierta es si la cambiamos por " exisite un x en esta sala que es mujer", esto se conoce como **cuantificador existencial**, en general se escribe como $(\exists x)\ p(x)$ y se lee como "existe x tal que $p(x)$". i

Ejemplo:

Algunas proposiciones que usan el cuantificador existencial.

- La proposición $(\exists x)\ x = 4$, es verdadera, tomando x como 4.
- La proposición $(\exists y)\ y$ es múltiplo de 3, es verdadera, por ejemplo $y = 9$.
- La proposición $(\exists n)\ n$ es natural $\wedge n < 0$, es falsa, ya que todo natural es mayor o igual a 0.
- La proposición $(\exists x)\ x$ es real $\wedge x^2 < 0$, es falsa, ya que todo real cumple que su cuadrado es mayor o igual a 0.

1.1.4. Función proposicional y cuantificadores

Relación entre cuantificadores

Es muy importante saber como negar una proposición que utiliza cuantificadores, por ejemplo la negación de la proposición "todos los x de esta sala son mujeres" es "existe un x tal que no es mujer", esto define una relación entre ambos cuantificadores, y es la siguiente:

$$\sim [(\forall x)\ p(x)] \Leftrightarrow (\exists x)\ (\sim p(x))$$

o bien

$$\sim [(\exists x)\ p(x)] \Leftrightarrow (\forall x)\ (\sim p(x))$$

Definición 1.12 (Cuantificador de Existencia y Unicidad)**.** Por último tenemos el cuantificador de **existencia y unicidad** que se escribe como $\exists! x\ p(x)$ y se lee como "existe un único x tal que $p(x)$. Formalmente, este cuantificador se puede definir a partir de los anteriores de la siguiente manera:

$$(\exists! x)\ p(x) \Leftrightarrow \underbrace{[(\exists x)\ p(x)]}_{\text{exisitencia}} \wedge \underbrace{[(\forall x)(\forall y)\ (p(x) \wedge p(y) \Rightarrow x = y)]}_{\text{unicidad}}$$

Lo más importante es que la proposición $\exists! x\ p(x)$ es verdadera solo si existe un único x que hace a $p(x)$ verdadero, si interpretamos la definición formal, notamos que para verificar que $\exists! x\ p(x)$ sea verdadera, debemos asegurar la existencia, es decir que exista algún x que haga $p(x)$ verdadero, y la unicidad, es decir, probar que cada vez que se satisface la propiedad para dos elementos, entonces necesariamente estos son iguales.

Ejemplo:

Como ejercicio podemos escribir la negación de $\exists! x\ p(x)$:

$$\sim \exists! x\ p(x) \Leftrightarrow [(\forall x)\ (\sim p(x))] \vee [(\exists x)(\exists y)\ (p(x) \wedge p(y) \wedge x \neq y)]$$

Ejemplo:

Otros ejemplos de negación:

- $\sim$ "Todas las personas de la sala son mujeres" $\Leftrightarrow$ "Existe una persona que no es mujer"
- "En la sala no hay ninguna mujer" $\Leftrightarrow$ "Cada individuo de la sala no es mujer"
- $\sim [(\forall x)\ (p(x) \Rightarrow q(x))] \Leftrightarrow (\exists x)\ [((\sim p(x)) \wedge q(x))]$
- $\sim [(\exists x)\ (p(x) \wedge q(x))] \Leftrightarrow (\forall x)\ [(\sim p(x)) \vee (\sim q(x))]$
- $\sim [(\forall x)(\exists y)(2x = y)] \Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)\ (2x \neq y)$

PARTE 1.2

Escuela de Verano para estudiantes de Enseñanza Media Universidad de Chile

Teoría de Conjuntos

Definición 1.13 (Conjunto)**.** Entenderemos un **conjunto** como una agrupación de elementos[6]. Queremos que ocurra lo siguiente; "conozco un conjunto si sé cuales son y cuales no son sus elementos".

Definición 1.14 (Relación entre elementos y conjuntos)**.** Si x es un elemento y A es un conjunto, la proposición $x \in A$ ("x pertenece a A") significa que x es uno de los elementos dentro del conjunto A. Por otra parte su negación se denota como $x \notin A \Leftrightarrow \sim (x \in A)$ ("x no pertenece a A").

1.2.1. Conjuntos, inclusión y pertenencia

Los conjuntos se pueden escribir por:

- **Extensión**: Se escriben exactamente los elementos que pertenecen a el conjunto. Ejemplo; $\{1, 0\}$, $\{0, \frac{1}{2}, 200, 6, 3\}$
- **Comprensión**: Se define mediante una regla general para sus elementos. Ejemplo; $\{x \in \mathbb{R} \mid x(x-1) = 0\}$, $\{2x \mid x \in \mathbb{Z} \land x \geq 0\}$

Observación 1.4. Si pensamos en el conjunto $0, 2, 4, 6, 8...$ ¿dónde cree que calzaría mejor esta forma de escribir un conjunto, extensión o comprensión?

Ejemplo:

Algunos conjuntos útiles:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ (Los naturales)
- $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ (Los enteros)
- $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{Z},\ \text{con } n \neq 0\}$ (Los racionales)
- $\mathbb{R} = \{$números reales; Por ej: $\sqrt{2}, e, \pi,$ y todos los racionales.$\}$
- $\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$ (Los irracionales)
- Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, los que llamaremos **intervalos**:
  - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
  - $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
  - $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
  - $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
  - $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
  - $]\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
  - $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

- $]\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- $]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

Definición 1.15 (Igualdad de conjuntos)**.** Si A y B son conjuntos, ellos serán iguales ($A = B$) si y solo si:

$$(\forall x)[x \in A \Leftrightarrow x \in B]$$

o equivalentemente

$$A = B \Leftrightarrow \text{ sus elementos son exactamente los mismos}$$

Observación 1.5. De la definición se desprende que en los conjuntos no es importante que una descripción por extensión se listen sus elementos con repeticiones, o se cambie el orden de ellos. Por ejemplo; $\{1, a, b, c, a, a\} = \{b, a, b, c, 1\}$.

Definición 1.16 (Conjunto vacío)**.** Se denota por ϕ al **conjunto vacío** y se define de modo que no tenga elementos, es decir que:

$$(\forall x)\ [x \notin \phi] \Leftrightarrow V$$

o equivalentemente

$$(\exists x)[x \in \phi] \Leftrightarrow F$$

Observación 1.6. La proposición $x \in \phi$ es siempre falsa.

Proposición 1.17. *El conjunto vació ϕ es único:*

Demostración. Recordemos del capítulo anterior que el esquema de demostración de unicidad es según $[(\forall x)(\forall y)\ (p(x) \wedge p(y) \Rightarrow x = y)]$.Donde en este caso $p(x)$ es "x es el conjunto vacío" Ahora supongamos que hay más de uno, digamos ϕ_1 y ϕ_2.
Como sabemos que $A = B \Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \Leftrightarrow x \in B]$, verificamos que:

$$(\forall x)\underbrace{[\underbrace{x \in \phi_1}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{x \in \phi_2}_{F}]}_{V}$$

$\Rightarrow \phi_1 = \phi_2$, en consecuencia el vacío es único. □

Definición 1.18 (Subconjunto)**.** Diremos que un conjunto A "contiene" a otro conjunto B, o que B es **subconjunto** de A ($B \subseteq A$) si todo elemento de B es obligatoriamente de A, es decir :

$$B \subseteq A \Leftrightarrow (\forall x)[x \in B \Rightarrow x \in A]$$

Observación 1.7. Notar que $A = B \Leftrightarrow [A \subseteq B \wedge B \subseteq A]$, en efecto, de la definición:

$$\begin{aligned}
A = B \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall x)[x \in A \Leftrightarrow x \in B] \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall x)[(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)] \text{ caracterización de la equivalencia (TB15)} \\
&\Leftrightarrow \quad (\forall x)[(x \in A \Rightarrow x \in B)] \wedge (\forall x)[(x \in B \Rightarrow x \in A)] \\
&\Leftrightarrow \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A
\end{aligned}$$

Proposición 1.19. *Para cualquier conjunto A, se tiene que:*

- $\phi \subseteq A$
- $A \subseteq A$

Demostración.

- $(\forall x)[\underbrace{\underbrace{x \in \phi}_{F} \Rightarrow x \in A}_{V}] \Leftrightarrow \phi \subseteq A.$
- $(\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in A]$
  $x \in A \Rightarrow x \in A$ es una proposición de la forma $p \Rightarrow p \Leftrightarrow V$, luego $A \subseteq A$.

□

Ejemplo:

Ejemplos sobre inclusión y pertenencia:

- $2 \in \{1, 2, 4\}$
- $2 \notin \{1, \{2\}, 4\}$
- $2 \nsubseteq \{1, 2, 4\}$
- $\{2\} \subseteq \{1, 2, 4\}$
- $\{2, 4\} \subseteq \{1, 2, 4\}$
- $\{2\} \notin \{1, 2, 4\}$
- $\{2\} \in \{1, 2, 4, \{2\}\}$
- $\{2\} \notin \{1, 2, 4, \{2, 3\}\}$
- $\{2\} \notin \{1, 2, 4, \{\{2\}, 2, 3\}\}$
- $\phi \in \{\phi\}$
- $\phi \notin \{\{\phi\}\}$

1.2.2. Operaciones entre conjuntos

Dados dos conjuntos A y B se definen los siguientes conjuntos:

Definición 1.20 (Unión de conjuntos)**.** El conjunto $A \cup B$ se llama "A **unión** B" y es tal que contiene tanto a los elementos del conjunto A como a los elementos del conjunto B, se define por:

$$(\forall x)[x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B]$$

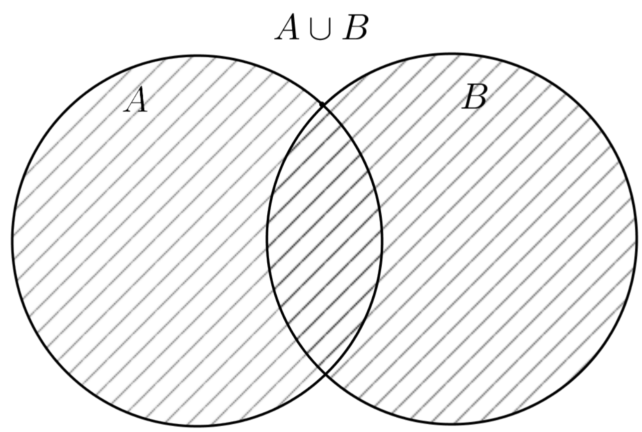

FIGURA 1.1. Diagrama de Venn; Unión de A con B.

Definición 1.21 (Intersección de conjuntos)**.** El conjunto $A \cap B$ se llama "A **intersección** B" y es tal que contiene solo a los elementos del conjunto A que también están en B, se define por:

$$(\forall x)[x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B]$$

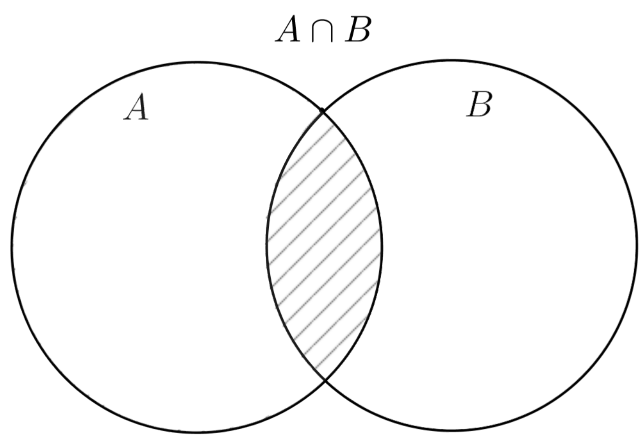

FIGURA 1.2. Diagrama de Venn; Intersección de A con B.

Definición 1.22 (Diferencia de conjuntos). El conjunto $A \smallsetminus B$ se llama "A **menos** B" y es tal que contiene solo a los elementos del conjunto A que no están en B, se define como:

$$(\forall x)[x \in A \smallsetminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B]$$

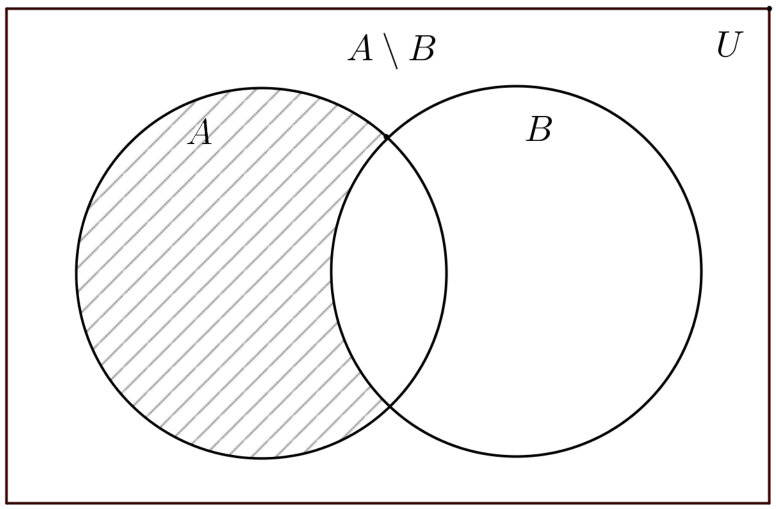

FIGURA 1.3. Diagrama de Venn; Conjunto A menos B.

Definición 1.23 (Conjunto Universo). Se define un conjunto **universo**, que denotaremos como U, como aquel (elegido por nosotros) que contiene todos los elementos que nos interesan.

Observación 1.8. Dado un universo U, la proposición $x \in U$ es siempre verdadera

Definición 1.24 (Complemento de un conjunto). Dado un universo U se define el **complemento** del conjunto A (A^c) como:

$$A^c = U \smallsetminus A$$

o equivalentemente

$$(\forall x)[x \in A^c \Leftrightarrow x \in U \wedge x \notin A]$$

Observación 1.9. Notar que, como la proposición $x \in U$ es siempre verdadera, se tiene que

$$(\forall x)[x \in A^c \Leftrightarrow \underbrace{x \in U}_{V} \wedge x \notin A] \Leftrightarrow (\forall x)[x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A]$$

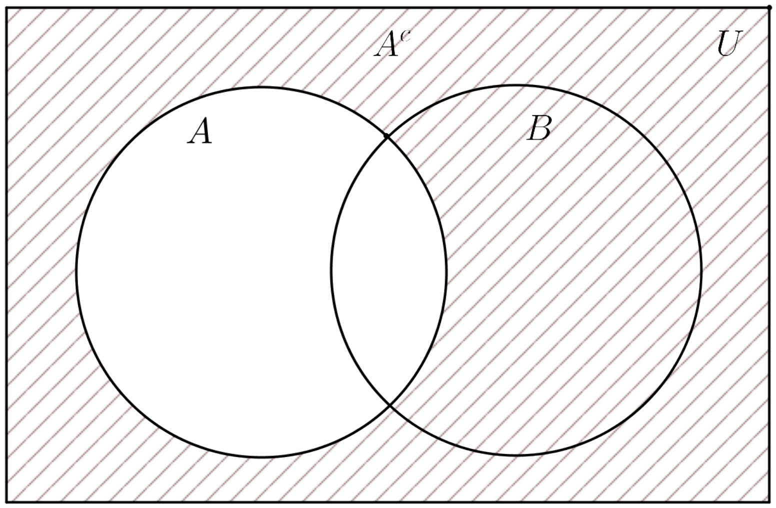

FIGURA 1.4. Diagrama de Venn; Complemento de A.

Definición 1.25 (Diferencia simétrica)**.** El conjunto $A\Delta B$ se llama " **diferencia simétrica** entre A y B", y contiene a los elementos en A y en B, pero que no están en ambos a la vez, se define como:

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

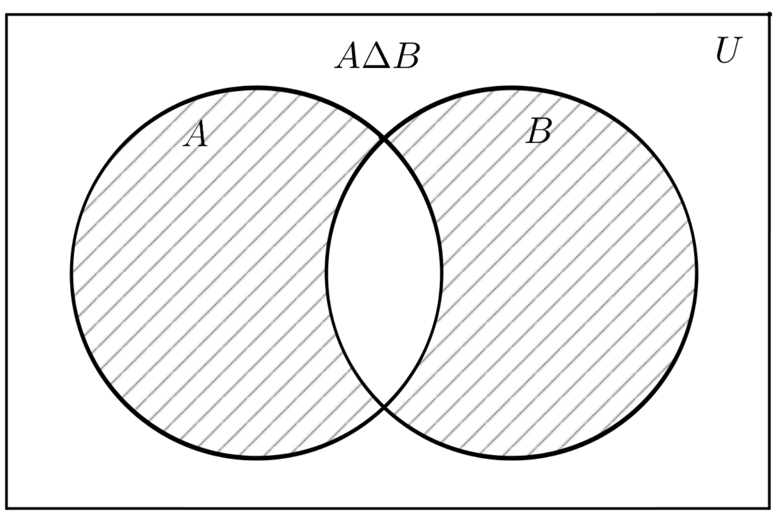

FIGURA 1.5. Diagrama de Venn; Diferencia simétrica entre A y B.

Observación 1.10. Notar que $A \setminus B = A \cap B^c$, en efecto, de la definición, sea x cualquiera:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B^c \end{aligned}$$

$$\therefore A \setminus B = A \cap B^c$$

Ejemplo:

Sea $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ el universo, y $A = \{2,3,5,7\}$, $B = \{2,4,6,7\}$, $C = \{4,6,8\} \subseteq U$, entonces se tiene que:

- $A \cup B = \{2,3,4,5,6,7\}$
- $A \cap B = \{2,7\}$
- $B \cup C = \{2,4,5,7,6,8\}$
- $A \cap C = \phi$
- $A^c = \{1,4,6,8,9\}$
- $A \setminus B = \{3,5\}$
- $A \Delta B = \{3,5,4,6\}$

Proposición 1.26. *Sean A, B, C conjuntos (en un universo U), entonces se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Idempotencia:*
   - $A \cap A = A$
   - $A \cup A = A$
2. - $A \cup \phi = A$
   - $A \cap \phi = \phi$
3. - $A \cup U = U$
   - $A \cap U = A$
4. - $A \cup A^c = U$
   - $A \cap A^c = \phi$
5. *Conmutatividad:*
   - $A \cup B = B \cup A$
   - $A \cap B = B \cap A$
6. *Asociatividad:*
   - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   - $A \cap (B \cap C) = (A \cup B) \cup C$
7. *Dsitributividad:*
   - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
8. *De Morgan:*
   - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
9. $(A^c)^c = A$
10. - $A \cap B \subseteq A$
    - $A \subseteq A \cup B$
11. *Reflexividad:*

- $A \subseteq A$
- $A = A$

12. $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$
13. $A \setminus B = A \cap B^c$
14. *Propiedades de la diferencia simétrica:*
    - $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
    - $A \Delta B = B \Delta A$
    - $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
    - $A \Delta A = \phi$
    - $A \Delta \phi = A$
    - $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

Demostración. La demostración de cada una de estas propiedades se desprenden directamente de las tautologías básicas, haremos la 12. como ejemplo.

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in B] \\ &\Leftrightarrow (\forall x)[x \notin B \Rightarrow x \notin A] \text{ contrarrecíproca (TB14)} \\ &\Leftrightarrow (\forall x)[x \in B^c \Rightarrow x \in A^c] \\ &\Leftrightarrow B^c \subseteq A^c \end{aligned}$$

□

Observación 1.11. Notar que todas estas propiedades pueden ser utilizadas directamente para demostrar una propiedad particular[7].

Ejemplo:

Demostrar que $A \Delta B = A \cup B \setminus A \cap B$

Demostración.

$$\begin{array}{rcc} A \Delta B & = & (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ PC13 & = & (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\ PC7 & = & [A \cup (B \cap A^c)] \cap [B^c \cup (B \cap A^c)] \\ PC7 & = & [(A \cup B) \cap (A \cup A^c)] \cap [(B^c \cup B) \cap (B^c \cup A^c)] \\ PC4 & = & [(A \cup B) \cap U] \cap [U \cap (B^c \cup A^c)] \\ PC3 & = & (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c) \\ PC8 & = & (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ PC13 & = & (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{array}$$

□

Definición 1.27 (Conjunto Potencia)**.** Dado un conjunto A, llamamos **conjunto potencia** de A, que denotamos por $\mathcal{P}(A)$, esto es al conjunto de todos los subconjuntos de A, se define como:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

[7] Cada vez que se usen y sea necesario recalcarlo se llamarán como PCn , donde n es el número asignado a la propiedad de conjuntos en este apunte.

o equivalentemente

$$(\forall X)[X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subseteq A]$$

Observación 1.12. Note que $\phi \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$

Ejemplo:

Sea $A = \{0,1\}$, y $B = P\{a,b,c\}$ entonces:

- $\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$
- $\mathcal{P}(B) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$
- $\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)) = \{\phi, \{\phi\}\}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

Ejemplo:

Demostrar que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

DEMOSTRACIÓN. Si $X \subseteq A \vee X \subseteq B$, entonces se tiene que $X \subseteq A \cup B$ (¡ justifique !), esto es equivalente a decir:

$$X \in \mathcal{P}(A) \vee X \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \Rightarrow X \in \mathcal{P}(A \cup B)$$

Con lo que se demuestra que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
¿ Será cierto que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$?. □

1.2.3. Cuantificando sobre conjuntos

Dado un conjunto A y una proposición $p(x)$, cuando nos interese saber qué pasa con la proposición sólo con elementos de A, es posible reflejarlo mediante las siguientes proposiciones:

- La proposición "Todos los x que están en A satisfacen $p(x)$ " la escribimos como:
$$(\forall x \in A)p(x)$$
- La proposición "Existe al menos un x que está en A y satisface $p(x)$ " la escribimos como:
$$(\exists x \in A)p(x)$$

Observación 1.13. Notar que podemos hacer definiciones formales usando lo previo de la siguiente manera:

$$(\forall x \in A)p(x) \Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \Rightarrow (p(x))]$$

$$(\exists x \in A)p(x) \Leftrightarrow (\exists x)[x \in A \wedge (p(x))]$$

Como conclusión, la negación de estas proposiciones será:

- $$\begin{aligned} \sim [(\forall x \in A)p(x)] &\Leftrightarrow \sim [(\forall x)[x \in A \Rightarrow (p(x))]] \\ &\Leftrightarrow (\exists x)[x \in A \wedge (\sim p(x))] \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in A)(\sim p(x)) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \sim [(\exists x \in A)p(x)] &\Leftrightarrow \sim [(\exists x)[x \in A \wedge (p(x))]] \\ &\Leftrightarrow (\forall x)[x \notin A \vee (\sim p(x))] \\ &\Leftrightarrow (\forall x)[x \in A \Rightarrow (\sim p(x))] \\ &\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\sim p(x)) \end{aligned}$$

Definición 1.28 (Pares ordenados)**.** Si $a \in A$ y $b \in B$, el **par ordenado** (a,b) es una agrupación de estos elementos, en la que se distingue a a como el primer elemento y a b como el segundo elemento.

De acuerdo a esto, diremos que dos pares ordenados (a,b) y (x,y) son iguales si y solo si son iguales componente a componente, es decir:

$$(a,b) = (x,y) \Leftrightarrow a = x \wedge b = y$$

Definición 1.29 (Producto Cartesiano)**.** Dados dos conjuntos A y B se define el **producto cartesiano** entre A y B, que denotamos como $A \times B$ ("A cruz B") se define como:

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Así

$$z \in A \times B \Leftrightarrow (\exists a \in A)(\exists b \in B) \text{ tal que } z = (a,b)$$

1.2.4. Producto de conjuntos

Observación 1.14. Notar que, si A y B son un conjuntos, entonces:

- $A \times \phi = \phi$
- $\phi \times A = \phi$
- $A \times B = \phi \Leftrightarrow A = \phi \vee B = \phi$

Ejemplo:

Si consideramos $A = \{a,b\}$ y $B = \{1,2\}$, entonces $A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$

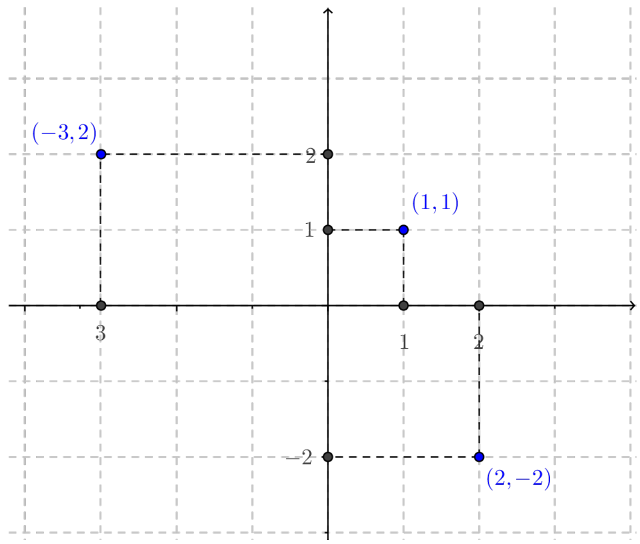

FIGURA 1.6. Representación usual en el plano cartesiano.

Ejemplo:

Demostrar que $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

DEMOSTRACIÓN. Sea (x, y) un par ordenado cualquiera.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \quad &\Leftrightarrow \quad x \in (A \cap B) \wedge y \in (C \cap D) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \in B) \wedge (y \in C \wedge y \in D) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in D) \\
&\Leftrightarrow \quad ((x,y) \in A \times C) \wedge ((x,y) \in B \times D) \\
&\Leftrightarrow \quad ((x,y) \in (A \times C) \cap (B \times D)
\end{aligned}$$

Es decir $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$. □

Bibliografía

[1] Spivak, M. Calculus, Reverte,1993.
[2] Cominetti R., Matamala M., Introducción al Cálculo - Apuntes 1er año FCFM, U. de Chile, 2012.
[3] Gomez D., Rapaport I., Introducción al Álgebra - Apuntes 1er año FCFM, U. de Chile, 2012.
[4] San Martin J., Cominetti R., Matamala M., Calculo diferencial e integral - Apuntes 1er año FCFM, U. de Chile, 2012.