Escuela de Verano
para estudiantes de Enseñanza Media
Universidad de Chile

Universidad de Chile
Facultad De Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2014

Tarea 0 - Cálculo infinitesimal

Para hacer construcciones matemáticas se necesitan dos ingredientes principales (1.) un **sistema axiomático**, es decir, un conjunto de leyes que se consideran como verdaderas e irrefutables, para fijar ideas se pueden pensar como las reglas de un juego (las reglas no se pueden violar). (2.) El segundo ingrediente es la **lógica matemática**, esta nos permite deducir nuevas "verdades" (proposiciones, teoremas) a partir de los axiomas.

El objetivo de esta tarea es introducir el sistema de la lógica matemática y conjuntos y así fijar conceptos básicos de matemáticas muy necesarios para el desarrollo del curso.

Gran parte de esta guía es para ejercitar, serán evaluados aquellos problemas marcados con el símbolo ★, y deben ser entregados el primer día de clases, cada pregunta debe ir en hojas separadas. Se les adjunta material necesario para el desarrollo de esta guía, también pueden buscar en otras referencias si así lo desean.

1. Lógica.

P1. *a*) Construya la tablas de verdad de la siguiente proposición: $p \wedge (q \vee r)$.

b) Determine si la siguiente proposición es una tautología: $p \Rightarrow (p \vee q)$.

c) Demostrar las siguientes equivalencias: $[p \wedge (q \wedge \bar{p})] \Leftrightarrow V$.

P2. ★ Indique en cuál de los siguientes casos p es condición necesaria y suficiente para q (es decir $p \Leftrightarrow q$):

a) p: n es múltiplo de 4, q: n es número par.

b) p: n y m son números pares; q: $n + m$ es un número par.

P3. ★ Sean los conjuntos de números $A = \{a_1, ..., a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ y $B = \{b_1, ..., b_m\} \subseteq \mathbb{R}$ (ordenados de mayor a menor) tales que $(\forall a \in A)(\forall b \in B)\ a \leq b$, demuestre que se cumple que

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \frac{b_1 + \cdots + b_m}{m}$$

P4. Determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$\exists n \in \mathbb{N} :\ (n \leq 1 \Rightarrow n^2 \geq 4n)$$

A continuación, escriba la proposición negada.

2. Conjuntos.

P1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique brevemente su respuesta.

a) $\emptyset \subseteq \emptyset$

b) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

c) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$

d) $\{a, \emptyset\} \in \{a, \{a, \emptyset\}\}$

P2. Sean $A,\ B,\ C\ y\ D$ conjuntos. Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$
¿es cierto siempre que $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$? ¿y que $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$?

P3. *a*) Demostrar la siguiente propiedad del complemento y la diferencia: $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

b) Sea U conjunto universo, que contiene a A, B y C. Demuestre que: $(A \cup B) \cup (A^c \cap B^c) = U$

c) Sean A, B conjuntos. Discuta la validez de las siguientes afirmaciones:

1) $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$. 2) $A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$.

P4. ★ Responda a las siguientes preguntas, justifique claramente:

a) Si $A \cup B = A \cup C$, ¿es necesario que $B = C$?

b) Si $A \cap B = A \cap C$, ¿es necesario que $B = C$?

P5. ★ Probar que si $(A \cap X = A \cap Y) \wedge (A \cup X = A \cup Y)$, entonces $X = Y$.