Universidad de Chile
Facultad De Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2014
Profesores: Clara Fittipaldi, Natalia Ruiz, Leonardo Sánchez

Profesores auxiliares: Jose Chesta, Varinia Maluenda, Catalina Pesce, Tamara Quiroga, Benjamin Ruiz, Felipe Salas, Mauricio Zavalla

Guía 1: Inducción y Sumatorias.

1. Inducción.

P1. Demostrar que:

a) $n^2 + n$ es divisible por 2.

b) $n^3 + 2n$ es divisible por 3.

c) $n^2 - n + 2$ es divisible por 2.

d) $(a - b)$ es factor de $a^n - b^n$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.

e) $(a + b)$ es factor de $a^{2n-1} + b^{2n-1}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$.

P2. Demostrar que

a) todo número natural $n \geq 24$ se puede expresar como la suma de cincos y sietes.

b) Para cada $n \geq 0$ el número $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es múltiplo de 13.

c) Para $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 10$ se tiene que $n - 2 < \dfrac{n^2 - n}{12}$.

d) Para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $2^n > n$.

P3. Muestre que

a) si $q(n) : 2 + 4 + \cdots + 2n = n^2 + n + 1$, se cumple que $q(n) \Rightarrow q(n+1)$, pero $q(1)$ es falso.

b) si $q(n) : n^2 - n + 41$ *es un número primo*, se tiene que $q(1)$ es verdadera, pero $q(n) \Rightarrow q(n+1)$ es falso.

P4. Para $n \in \mathbb{N}$, se define la proposición

$$p(n) : 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Demostrar que para todo $k \geq 1$ la veracidad de $p(k)$ implica la veracidad de $p(k+1)$. ¿Es verdadera $p(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$?.

P5. En esta sección se pedirá expresar todas las sumas que aparezcan como sumatorias, como por ejemplo

$$1+2+3+4+5+\ldots+n=\sum_{i=1}^{n} i$$

Demuestre usando inducción, que el enunciado es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

b) $3+5+7+\ldots+(2n+1)=n(n+2)$.

c) $3+4+5+\ldots+(n+2)=\dfrac{n(n+5)}{2}$.

d) $1+5+9+\ldots+(4n-3)=n(2n-1)$.

e) $4+3+2+\ldots+(5-n)=\dfrac{n(9-n)}{2}$.

f) $-2-3-4-\ldots-(n+1)=-\dfrac{n(n+3)}{2}$.

g) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\ldots+n(n+2)=\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.

h) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

i) $1\cdot 2+3\cdot 4\cdot 5\cdot 6+\ldots+(2n-1)\cdot 2n=\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{3}$.

j) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

k) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

l) $\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}+\dfrac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}+\dfrac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)2n}=\dfrac{1}{2n}$.

m) $1+r+r^2+\ldots+r^{n-1}=\dfrac{r^n-1}{r-1}$, donde r es una constante distinta de 1.

n) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}=(1+2+3+\ldots+n)^2$

P6. Probar que la suma de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados es $180\cdot(n-2)$.

P7. A la edad de un año, una pareja (macho y hembra) de comadrejas da origen a dos nuevas parejas de comadrejas y en cada año posterior produce 6 nuevas parejas de comadrejas. Suponga que las comadrejas no mueren y que se comienza con un par de comadrejas recién nacidas, es decir $a_0 = 1$.

a) Determine una relación de recurrencia para a_n, la cantidad de comadrejas al final del año n.

b) Demuestre por inducción que:

$$a_n = \frac{1}{5}\left[4^{n+1} - (-1)^{n+1}\right]$$

P8. Supongamos que Ud. recibe una carta de una "cadena", con la lista de los nombres y direcciones de 6 personas. La carta le pide que envie $1000 a la persona que encabeza la lista. Además, Ud. debe hacer una nueva carta casi idéntica a la recibida, los únicos cambios son suprimir en la lista de nombres el primero de ellos y agregar al final de la lista el nombre suyo al final. Esta carta reformada tiene que enviarla a cinco amigos suyos, distintos de los que aparecen en la carta reformada. La carta original promete a Ud. que recibirá dentro de pocas semanas la cantidad de $15.625.000.
Aunque estas "cadenas" nunca funcionan Ud. podría encontrar entretenido verificar si la promesa de la carta original es correcta, bajo el supuesto que Ud. y todos los receptores de las cartas siguieran las instrucciones, es decir, no "rompieran la cadena".
Podemos llamar c_k a la cantidad de cartas en el eslabón k, siendo la carta que Ud. recibió el eslabón 0, es decir $c_0 = 1$. Las cartas que Ud. envía corresponden al primer eslabón, así $c_1 = 5$, la cantidad de cartas enviadas por sus amigos es c_2, etc.

a) ¿Cuál es la relación entre c_k y c_{k+1}?

b) Verifique por inducción que $c_k = 5^k$.

c) ¿De que eslabón son los receptores de cartas que deberían enviar a Ud. $1000 cada uno?

P9. En una hoja de papel se tiene n rectas distintas dibujadas de borde a borde, de modo que todo par de rectas tiene un punto en común (que no está en el borde de la hoja) y no hay tres (o más) que concurran en un mismo punto.

a) Si a_k es la cantidad de regiones en que queda dividida la hoja al tener k rectas. ¿qué relación hay entre a_k y a_{k+1}?

b) Determine a_n en términos de n, sin referencia a a_{n-1}.

P10. Una "Torre de Hanoi" es un juego consistente de n anillos de distintos tamaños y tres estacas verticales fijas en un tablero A, B, C, alineadas de izquierda a derecha, en las que se colocan los anillos. Al iniciar el juego todos los anillos están en la estaca A, apilados de mayor a menor, el más grande en la base, es decir, formando una pila cónica. El juego consiste en trasladar los anillos a la estaca C, para obtener una pila igual a la original. La complicación es que cada vez se puede mover un solo anillo para ubicarlo en otra estaca y si en esta hay otros anillos ellos deben ser de menor diámetro, es decir, en cada etapa del juego en cada estaca debe haber una pila cónica.

a) Determine una recurrencia para a_n, el número mínimo de movimientos para lograr el objetivo.

b) Conjeture una fórmula para a_n y demuéstrela por inducción.

Indicación: La observación clave es que para mover el anillo más grande desde A hasta C, debemos primero mover los $(n-1)$ anillos restantes desde A a B y luego desde B a C.

P11. Sea S_n un conjunto formado por n números distintos. Se busca obtener una relación de recurrencia para a_n, la cantidad de comparaciones entre pares de números que están en S_n, para determinar el mayor de todos ellos.Es claro que $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$. En el caso general se propone el siguiente algoritmo (procedimiento). Si n es par, podemos calcular M_1, el mayor de los números en la primera mitad de S_n; después calculamos M_2, el mayor de los números en la segunda mitad de S_n; finalmente, hacemos las comparaciones entre M_1 y M_2, para así obtener el mayor elemento de S_n. Si n es impar, separamos S_n en un número aislado cualquiera y 2 mitades iguales del resto. En estas 2 mitades elegimos M_1 y M_2 como en el caso anterior y comparamos el mayor de ambos con el número aislado separado antes, para así obtener en mayor número de S_n.

a) Encuentre a_n para n par y para n impar.

b) Considere un algoritmo que recorra S_n de manera ordenada y que compare cada elemento nuevo con el mayor de los anteriores. Encuentre el número de comparaciones b_n que se realizaría con este algoritmo y compárelo con a_n

c) Adapte ambos algoritmos al caso de tener que obtener el mayor y el menor número de S_n y compare su eficiencia, en cuanto al número de comparaciones que realiza cada uno.

P12. Una persona debe subir una escala de n peldaños, y en cada paso puede abarcar un peldaño o dos peldaños. Se trata de establecer una relación de recurrencia para a_n, la cantidad de maneras distintas de ascender la escala de n peldaños. Es fácil ver que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_3 = 3$. Note que para calcular a_4 podemos razonar así: si el primer paso abarca un peldaño, el resto del recorrido (3 peldaños) se puede hacer de a_3 maneras; si el primer paso abarca 2 peldaños, el resto del ascenso (2 peldaños) se puede hacer de a_2 maneras, luego $a_4 = a_3 + a_2$.

a) Exprese a_n en términos de a_{n-1} y a_{n-2} para $n \geq 3$.

b) Demuestre por inducción que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

2. Sumatorias y Series

P1. Calcule las siguientes sumas :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)$

(c) $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} 5k(k+2)$

(d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n-1} (k-2)(k+1)$

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1) + k\sqrt{k+1}}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+2)}{k(k+1)} \cdot \frac{1}{2^k}$

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

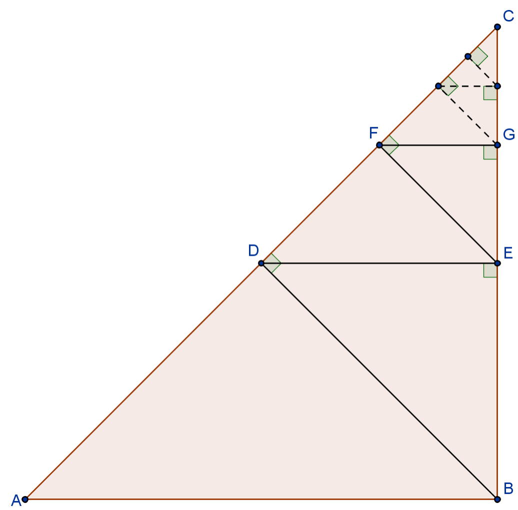
(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left[(2k-1)x\right]$

Indicación: multiplique la expresión por $\frac{2\,\mathrm{sen}(x)}{2\,\mathrm{sen}(x)}$ *y utilice la siguiente identidad trigonométrica* $\mathrm{sen}(\alpha+\beta) - \mathrm{sen}(\alpha-\beta) = 2\,\mathrm{sen}(\beta)\cdot\cos(\alpha)$.

P2. Se tiene un triángulo rectángulo isósceles de catetos de largo 1. Por B se traza una perpendicular a AC, por D se traza una perpendicular a BC, por E una perpendicular a AC, por F una perpendicular a BC y así sucesivamente.

Calcular la siguiente serie :

$$AB + BD + DE + EF + FG$$



P3. Se tiene un triangulo equilátero cuyo lado vale $10\sqrt{3}$ metros. Se toman los puntos medios de sus lados y al unírseles se forma un triangulo al medio, en este triángulo a sus vez se toman los puntos medios de sus lados y se les une, y así repetimos la operación infinitas veces. Calcular la suma de todas las áreas así formadas.

Indicación: Puede serle útil primero obtener el área de un triángulo equilátero en función de su lado.

P4. Se deja caer una bola desde una altura de 200 metros. En cada rebote se eleva hasta alcanzar la tercera parte de la altura desde la cual cayó en el instante anterior al rebote. Que distancia aproximadamente recorrió la bola hasta que quedo teóricamente en reposo.

P5. Muestre que los siguientes resultados son ciertos.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \sqrt{m+1} - 1.$

P6. Considere una función f que satisface la siguiente propiedad:

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

(I) Demuestre que $f(1) = 0$.

(II) Demuestre que $f(-x) = f(\frac{1}{x})$.

(III) Demuestre que $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$.

(IV) Calcule $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} f(1 + \frac{1}{k})$.

P7. Muestre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

P8. Un granjero desea vender su parcela, para lo cual puso un anuncio y se presentaron 7 compradores. Al primero le vendió la mitad de su parcela más media hectárea.
Al segundo comprador le vendió la mitad de lo que quedaba, más media hectárea. Así sucesivamente, hasta el séptimo comprador, que adquirió la mitad de lo que quedaba más media hectárea, con lo cual el granjero vendió el total del terreno disponible.

a) Si x es el número total de hectáreas de la parcela, encuentre una expresión para la cantidad de terreno adquirido por cada comprador.

b) Determine el valor de x.

3. Teorema del Binomio

P1 Calcule las siguientes sumas:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kk!$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$

P2 Probar las siguientes identidades:

(a) $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

(b) $\displaystyle n\binom{n-1}{k} = (n-k)\binom{n}{k}$

(c) $\displaystyle\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

P3 Determinar el valor de n si $\dfrac{\binom{n}{4}}{\binom{n+1}{3}} = \dfrac{5}{6}$

P4 Calcular el término central de $\left(\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{2}x^{-2}\right)^6$

P5 En el desarrollo de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{18}$, encuentre:

a) El término constante.

b) El término central.

c) El valor del coeficiente de x^6.

P6 Utilice el teorema del binomio para demostrar que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

P7 Sean p, q reales no negativos tales que $p + q = 1$. Calcule

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2$$

Indicación: $k^2 = k(k-1) + k$.