FM300-1 Introducción a la Teoría Matemática. Enero 2014
Profesor: Felipe Célèry
Auxiliares: Bruno Aguiló, Franco Amigo, Nicolás Zalduendo

Guía 2: Números Reales y Vectores en el Plano

13 de Enero de 2014

Parte 1: Axiomas de Cuerpo de los Números Reales

1. Demuestre las siguientes propiedades de los números reales:

   a) El elemento neutro para el producto es único

   b) El inverso multiplicativo de un número es único

   c) La ecuación $ax = b$ con $a \neq 0$, tiene una única solución en los reales. Está dada por $x = ba^{-1}$

   d) Dado $a \neq 0$, pruebe que $(a^{-1})^{-1} = a$

2. Sea C un conjunto de números reales que satisfacen los siguientes axiomas:

   (A1) $2 \in C$

   (A2) Si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$

   (A3) Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$

   (A4) $3 \notin C$

   Demuestre entonces las siguientes propiedades indicando qué axiomas, ya sea de los números reales o de los recién mencionados, utiliza:

   a) $9 \in C$

   b) $1 \notin C$

   c) Si $5 \in C$, entonces $22 \in C$

   d) Si $x, y \in C$, entonces $3x + 1 + 3y \in C$

   e) Si$x \in C$, entonces$-x \in C$

3. En el cuerpo de los números reales se define $2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1, 5 = 4 + 1$ y $6 = 5 + 1$. Usando sólo los axiomas de cuerpo de los reales y el hecho que $2 \neq 0$, pruebe las siguientes afirmaciones, detallando todos los pasos y mencionando el axioma o definición que utiliza en cada uno de ellos:

   a) $3 + 2 = 5$

   b) $3 \cdot 2 = 6$

   c) $4 \cdot 2^{-1} = 2$

   d) $5 - 3 = 2$

   e) $(4 \cdot 3) \cdot 2^{-1} - 2 = 4$

4. Demuestre las siguientes igualdades de números reales, indicando claramente los axiomas o propiedades usados:

   a) $a + a = 2 \cdot a$
   b) $a - (b - c) = a + (-b) + c$
   c) $(a + b)(a - b) = a^2 + b^2$
   d) $(a - b)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$
   e) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
   f) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
   g) $(x + \frac{b}{2})^2 + c - (\frac{b}{2})^2 = x^2 + bx + c$

5. Usando exclusivamente los axiomas de cuerpo de los reales, y mencionándolos claramente cada vez que los use, demuestre las propiedades siguientes. Si ocupa alguna otra propiedad entonces deberá demostrarla indicando los axiomas que use en ello:

   a) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x, y \neq 0$, $(x + y)(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1} + y^{-1}$
   b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x, y \neq 0$, $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$
   c) Usando (b), demostrar que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tal que $b, d \neq 0$, $ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + cb)(bd)^{-1}$

6. Usando **sólo** los axiomas de los números reales y las unicidades de los inversos, demuestre las siguientes propiedades (si necesita alguna propiedad extra, **debe demostrarla**):

   a) $\forall x, y \in \mathbb{R}, (-x) + (-y)$ es el inverso aditivo de $x + y$
   b) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que verifican la relación $(ad) + (-(cb)) = 0$ entonces:

   $$[(a + b)d] + [-((c + d)b)] = 0$$

   c) Para $a \neq 0$, $-(a)^{-1} = (-a)^{-1}$

7. Sea C un conjunto de números reales que satisfacen los siguientes axiomas:

   (A1) $3 \in C$
   (A2) Si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$
   (A3) Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$
   (A4) $7 \notin C$

   Demuestre entonces las siguientes propiedades indicando qué axiomas, ya sea de los números reales o de los recién mencionados, utiliza:

   a) $1 \notin C$
   b) Si $x, y \in C$, entonces $3x + 2y + 4 \in C$
   c) Si $x, y \in C$, entonces $4 - x - y \notin C$
   d) Si $3y + z + 4 \notin C$, entonces $(y \notin C \lor \frac{z}{2} \notin C)$
   e) $\nexists x \in C$ tal que $3(2x - 1) = 39$

8. Usando **sólo** los axiomas de los números reales y las unicidades de neutros e inversos, demuestre las siguientes propiedades (si necesita alguna propiedad extra, **debe demostrarla**):

   a) $(-a) = (-b) \Rightarrow a = b$
   b) $[(a + b \neq 0) \land (ax + by = 0) \land (bx + ay = 0)] \Rightarrow (x + y) = 0$

9. Sean a, b dos números reales distintos de cero. Demuestre que:

$$\frac{1}{a^3} = \frac{1}{b^3} \Rightarrow a = b$$

10. Usando **sólo** los axiomas de los números reales y las unicidades de neutros e inversos, demuestre fundamentando cada paso, la siguiente propiedad (si necesita alguna propiedad extra, **debe demostrarla**):

$$\forall a, b, m \in \mathbb{R} \text{ tal que } b, m \neq 0, (ma)(mb)^{-1} = ab^{-1}$$

11. Usando **sólo** los axiomas de los números reales y las unicidades de los inversos, demuestre las siguientes propiedades (si necesita alguna propiedad extra, **debe demostrarla**):

    a) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, desmuestre que:

    $$(a + b = 0) \ \wedge \ (a + c = 0) \Rightarrow (b = c)$$

    b) $\forall b \in \mathbb{R}$ tal que $b \neq 0$, $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$

12. Usando **sólo** los axiomas de los números reales y las unicidades de los inversos, demuestre las siguientes propiedades (si necesita alguna propiedad extra, **debe demostrarla**):

    a) $\forall a \in \mathbb{R}, (-1) \cdot a = -a$

    b) Sean a, b, c tal que $b, c \neq 0$, entonces:

    $$(ab^{-1} + c^{-1})[(bc)(ac + b)^{-1}] = 1$$

13. Usando **sólo** los axiomas de los números reales y las unicidades de los inversos, desmuestre que si $a, b \neq 0$ son tales que $a + b = 1$, entonces se cumple que:

    $$\text{El inverso multiplicativo de } (a \cdot b) \text{ es } (a^{-1} + b^{-1})$$

14. Utilizando los axiomas de cuerpo de los números reales, pruebe que:

    a) $(\forall x \in \mathbb{R}), x \cdot 0 = 0$

    b) $(\forall x, y \in \mathbb{R}), (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

    c) El neutro aditivo no posee inverso multiplicativo.