FM300-1 Introducción a la Teoría Matemática. Enero 2014
Profesor: Felipe Célèry
Auxiliares: Bruno Aguiló, Franco Amigo, Nicolás Zalduendo

Guía 2: Números Reales y Vectores en el Plano

16 de Enero de 2014

Parte 2: Vectores en el Plano

1. Dibuje los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ en un sistema de coordenadas. Calcule los nuevos vectores $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{c} + \vec{d}$, $\vec{z} = \vec{a} + \vec{c}$ y grafíquelos.

2. Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\lambda = 3$, ¿Cuánto vale $\lambda\vec{a}$?. Grafique.

3. Dados los puntos $A = (1, 1)$, $B = (7, -2)$, $C = (6, 5)$ y $D = (3, 6)$, calcule:
   a) Punto medio de AB.
   b) Punto medio de BC.
   c) Punto medio de CD.
   d) Punto medio de DA.

4. Obtenga el producto punto de cada par de vectores dado

$$i)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ii)\ \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad iii)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5. Demuestre que el triángulo con vértices $P = (4, 1)$, $Q = (1, 0)$ y $R = (3, -6)$ es un triángulo rectángulo.

6. *a*) Encuentre vectores paralelos y perpendiculares a $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   b) Use los resultados anteriores para escribir las ecuaciones vectoriales de las rectas siguientes:
      a) Pasa por A y es paralela al vector $\vec{b}$.
      b) Pasa por A y es perpendicular al vector $\vec{b}$.
      c) Pasa por B y es paralela al vector $\vec{c}$.
      d) Pasa por C y es perpendicular al vector $\vec{c}$.
      e) Pasa por el origen y es paralela al vector $\overrightarrow{AC}$.
      f) Pasa por el origen y es perpendicular al vector $\overrightarrow{BC}$.

7. Considere las rectas $L_1 : \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $L_2 : \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a) Determine si los puntos $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ pertenecen o no a las rectas anteriores. De ser puntos de alguna recta, debe decir cuanto valen λ o μ.
   b) Encuentre los valores de λ y μ de modo que el punto de la primera y de la segunda recta coincidan (es decir, resuelva el sistema de ecuaciones que permite intersectar las dos rectas). ¿Cuál es el punto de intersección de las dos rectas?

8. Considere el triángulo formado por los puntos $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   a) Escriba las ecuaciones vectoriales de las rectas que contienen a los tres lados del triÃ¡ngulo.

   b) Escriba las ecuaciones vectoriales de las rectas que contienen a las alturas del triángulo. *Indicación: Encuentre vectores perpendiculares a los lados del triángulo, para conocer la dirección de las alturas.*

   c) Encuentre los puntos donde se intersectan las alturas con los lados del triángulo

9. *a*) Encuentre la ecuación vectorial de la recta L que pasa por los puntos $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   b) Encuentre la ecuación cartesiana o analítica de la recta D paralela a L y que pasa por el origen.

   c) Encuentre la ecuación vectorial y cartesiana de la recta R que pasa por $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ y que es perpendicular a D.

10. Determine las ecuaciones de las siguientes rectas:

    - Que pasa por $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix}$.
    - Que pasa por la intersección de las rectas $x - y = 1$ y $x + y = 0$ y es perpendicular a la recta $x + 2y = 0$.

11. Resuelva los siguientes sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\text{a)} \left.\begin{array}{rcr} 2x+3y & = & 1 \\ x-y & = & 5 \end{array}\right| \qquad \text{b)} \left.\begin{array}{rcr} 4x-3y & = & -2 \\ 3x-2y & = & 3 \end{array}\right| \qquad \text{c)} \left.\begin{array}{rcr} x/2-y/3 & = & 1 \\ x-2y & = & 3 \end{array}\right|$$

12. Sean tres rectas cuyas intersecciones definen el triángulo ABC con $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $C = 33$. Determinar a partir de las coordenadas de los 3 puntos:

    a) Perímetro del triángulo ABC.

    b) Área del triángulo ABC.

    c) Determine la ecuación de la recta formada por todos los puntos C que entreguen triángulos ABC con la misma área.

    d) Determine la ecuación de la recta formada por todos los puntos A que entreguen triángulos ABC con la misma área.