

FM300-1 Introducción a la Teoría Matemática. Enero 2014

Profesor: Felipe Célery

Auxiliares: Bruno Aguiló, Franco Amigo, Nicolás Zalduendo

Pauta P1 Ejercicio 1

08 de Enero de 2014

Problemas

1. Sean p, q, r y s proposiciones que satisfacen que la siguiente proposición es verdadera:

$$(q \text{ es verdadera}) \wedge [(p \wedge q) \text{ no es equivalente con } (r \Leftrightarrow s)]$$

Demuestre que el valor de verdad de la proposición:

$$[(p \wedge r) \vee (q \Rightarrow s)] \Rightarrow [p \vee (r \wedge s)]$$

es verdadero para todas las combinaciones de valores de verdad que cumplen la hipótesis.

2. Sea F un conjunto de personas que se encuentran esperando en la fila de un banco para ser atendidas. Para $x, y \in F$ se define la función proposicional: $\phi(x, y)$: "La persona x está más adelante que la persona y en la fila". Sea $p \in F$ una persona en la fila. Indicar, justificando sus respuestas, la(s) posición(es) de dicha persona en la fila para cada una de las siguientes proposiciones cuantificadas:

a) $(\forall x \in F)[\phi(p, x) \vee x = p]$

b) $(\forall x \in F)[\phi(x, p) \vee x = p]$

Solución

1. Para simplificar el problema, notemos que la hipótesis se puede reescribir de la siguiente manera:

$$(q \Leftrightarrow V) \wedge \sim [(p \wedge q) \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow s)]$$

Que al tratarse de una conjunción, será verdadero sólo si se cumple que:

$$(q \Leftrightarrow V) \Leftrightarrow V \text{ y } \sim [(p \wedge q) \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow s)] \Leftrightarrow V \text{ (1.0 punto)}$$

Además notemos que si $\sim [(p \wedge q) \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow s)]$ es Verdadero, entonces $[(p \wedge q) \Leftrightarrow (r \Leftrightarrow s)]$ es Falso (por de definición de negación), y por lo tanto $(p \wedge q)$ y $(r \Leftrightarrow s)$ tienen valores de verdad contrarios, ya que este es el único caso en que la equivalencia es Falsa. **(1.0 punto)**

Luego, nuestro problema se reduce a estudiar los casos:

a) $(p \wedge q) \Leftrightarrow V \wedge (r \Leftrightarrow s) \Leftrightarrow F$ **(0.5 puntos):**

Recordando que $q \Leftrightarrow V$ por hipótesis, y ya que $(p \wedge q) \Leftrightarrow V$, es fácil notar que $p \Leftrightarrow V$. Además de esto, como $(r \Leftrightarrow s) \Leftrightarrow F$, se concluye que ambas proposiciones tienen valores de verdad diferentes entre sí. **(0.5 puntos)**

Luego, reemplazando en la proposición, obtenemos:

$$[(V \wedge r) \vee (V \Rightarrow s)] \Rightarrow [V \vee (r \wedge s)]$$

Notemos que aplicando la proposición $(V \vee p) \Leftrightarrow V$ (TB3 del apunte del curso) a la parte derecha de la implicancia, obtendremos:

$$[(V \wedge r) \vee (V \Rightarrow s)] \Rightarrow V$$

Lo cual es Verdadero sin importar el Valor de Verdad de $[(V \wedge r) \vee (V \Rightarrow s)]$ (revisar Tabla de Verdad de \Rightarrow)(**1.0 punto**)

b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow F \wedge (r \Leftrightarrow s) \Leftrightarrow V$ (**0.5 puntos**):

Recordando que $q \Leftrightarrow V$ por hipótesis, y ya que $(p \wedge q) \Leftrightarrow F$, es fácil notar que $p \Leftrightarrow F$. Además de esto, como $(r \Leftrightarrow s) \Leftrightarrow V$, se concluye que ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad. (**0.5 puntos**)

Luego, reemplazando nuevamente en la proposición, obtenemos:

$$\begin{aligned} & [(F \wedge r) \vee (V \Rightarrow s)] \Rightarrow [F \vee (r \wedge s)] \\ [(F \wedge r) \vee (V \Rightarrow s)] & \Rightarrow (r \wedge s) \text{ (Donde usamos } (F \vee p) \Leftrightarrow p \text{ (TB2) en el lado derecho)} \\ [F \vee (V \Rightarrow s)] & \Rightarrow (r \wedge s) \text{ (Donde usamos } (F \wedge r) \Leftrightarrow F \text{ (TB2) en el lado izquierdo)} \\ (V \Rightarrow s) & \Rightarrow (r \wedge s) \text{ (Donde usamos } (F \vee p) \Leftrightarrow p \text{ (TB2) en el lado izquierdo)} \\ (V \Rightarrow s) & \Rightarrow (s \wedge s) \text{ (Donde reemplazamos } r \text{ por } s \text{ en el lado derecho, pues ambos tienen el} \\ & \text{ mismo valor de verdad por hipótesis)} \\ (V \Rightarrow s) & \Rightarrow s \text{ (Donde usamos que } (s \wedge s) \Rightarrow s \text{ (TB1) en el lado derecho)} \\ (F \vee s) & \Rightarrow s \text{ (Donde usamos Caracterización de la Implicancia en el lado izquierdo)} \\ s & \Rightarrow s \text{ (Donde usamos } (F \vee s) \Leftrightarrow s \text{ (TB2) en el lado izquierdo)} \\ (\sim s) \vee s & \text{ (Donde usamos Caracterización de la Implicancia)} \\ V & \text{ (Donde usamos (TB4)) } \text{ (**1.0 punto**)} \end{aligned}$$