



Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



Escuela de Verano
Para estudiantes de Educación Básica y Media
6 al 29 de enero de 2014 Universidad de Chile



Guía 1: Lógica y Conjuntos.

Introducción a la Teoría Matemática

Profesor: Felipe Célery

Profesores Auxiliares: Bruno Aguiló, Franco Amigo, Nicolás Zaluendo

1. Lógica.

P1. Construya las tablas de verdad de las siguientes proposiciones:

$$a) p \wedge (q \vee r)$$

$$c) [p \vee (\bar{q} \wedge \bar{r})] \vee [(q \wedge \bar{p}) \vee (r \wedge \bar{q})]$$

$$b) (p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q)$$

$$d) [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow (p \vee \bar{q})$$

P2. Sean p, q proposiciones tales que $p \Leftrightarrow V$, $q \Leftrightarrow F$ y r proposición cualquiera. Determine el valor de verdad de:

$$a) (p \wedge q) \vee q$$

$$c) (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$$

$$b) (p \vee q) \wedge q$$

$$d) (q \vee r) \Rightarrow (\bar{p} \vee \bar{r})$$

P3. Si $p \Leftrightarrow V$ y $q \Leftrightarrow r \Leftrightarrow F$ encuentre el valor de verdad de:

$$a) [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\bar{p} \wedge q)] \wedge (r \Rightarrow q)$$

$$b) \overline{[(p \vee (\bar{p} \wedge q)) \wedge q]} \Rightarrow [(\bar{q} \vee r) \Rightarrow (q \Rightarrow s)]$$

P4. Pruebe que las siguientes proposiciones son tautologías:

$$a) [p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$c) [(p \vee r) \Rightarrow q] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$b) (p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)]$$

$$d) [p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$$

P5. Determine si las siguientes proposiciones son tautologías:

$$a) p \Rightarrow (p \vee q)$$

$$c) p \Rightarrow (p \wedge q)$$

$$b) (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \bar{q})$$

$$d) (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$$

P6. Demostrar las siguientes equivalencias:

$$a) [p \wedge (q \wedge \bar{p})] \Leftrightarrow F$$

$$b) [(p \wedge q) \vee p] \Leftrightarrow p$$

$$c) [(p \Rightarrow q) \vee \bar{p}] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

$$d) \{[p \vee (q \Leftrightarrow \bar{p})] \Rightarrow \bar{q}\} \Leftrightarrow \bar{q}$$

- e) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r$
 f) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$
 g) $p \Rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
 h) $(p \wedge q) \Rightarrow r \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$
 i) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow s)] \vee [(r \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Leftrightarrow (p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)$
 j) $[p \vee (\bar{p} \wedge q)] \Leftrightarrow (p \vee q)$

P7. Se define el conectivo lógico binario $\star$ por la siguiente tabla:

p	q	$p \star q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Muestre que

- a) $\bar{p} \Leftrightarrow p \star p$
 b) $p \vee q \Leftrightarrow (p \star q) \star (p \star q)$
 c) $p \wedge q \Leftrightarrow (p \star p) \star (q \star q)$
 d) $p \star q \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \wedge \overline{(p \wedge q)}]$

P8. Se definen los conectivos lógicos ∇ y $\triangle$ mediante

$$p \nabla q \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$$

$$p \triangle q \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$$

Demuestre que

- a) $\bar{p} \Leftrightarrow (p \nabla p)$
 b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow \overline{(p \triangle q)}$

P9. Se define el conectivo lógico $\oplus$ como

$$p \oplus q \Leftrightarrow F \text{ si y sólo si } p \Leftrightarrow F \text{ y } q \Leftrightarrow F$$

$$p \oplus q \Leftrightarrow V \text{ para cualquier otro valor de } p \text{ y } q$$

Determine si la proposición

$$[(p \Rightarrow q) \vee q] \Leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \oplus \bar{q}]$$

es una tautología.

P10. Indique en cuál de los siguientes casos p es condición necesaria y suficiente para q (i.e. $p \Leftrightarrow q$):

- a) p : n es múltiplo de 4, q : n es número par.
- b) p : n y m son números pares; q : $n + m$ es un número par.
- c) p : n^2 es par; q : n es par.

P11. Demuestre por contradicción que

- a) *Si los 123 residentes de un edificio tienen edades que suman 3813 años, entonces existen 100 de ellos cuyas edades suman al menos 3100 años.*
- b) $\sqrt{2}$ no es un número racional.

P12. Determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$\exists n \in \mathbb{N} : (n \leq 1 \Rightarrow n^2 \geq 4n)$$

A continuación, escriba la proposición negada.

P13. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Escribir en símbolos matemáticos y averiguar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- a) Hay un elemento en A que es mayor que los restantes.
- b) Existe un único en A elemento cuyo cuadrado es 4.
- c) Para cada elemento en A existe otro en A que es menor o igual que él.
- d) Existe un elemento cuyo cuadrado es igual a sí mismo.

P14. Negar las siguientes proposiciones:

- a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$
- b) $\exists x \in \mathbb{R} : e < x < \pi$
- c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x < y$
- d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (x + y = 1 \Rightarrow x = -y)$.
- e) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : [(x + y) \text{ es par} \Rightarrow (x \text{ es par} \wedge y \text{ es par})]$
- f) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : (x < y \wedge x^2 \geq y)$
- g) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} : (x < y \Rightarrow x + z = y)$
- h) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (3x + y) \text{ es par}$
- i) $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} : (2x + y = 5 \Rightarrow x \cdot y < 2)$
- j) $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N} : [(n \cdot m > 2) \Leftrightarrow (2n + m \geq 1)]$

P15. Dadas las funciones proposicionales

$$\begin{aligned} p(x) &: x \text{ es par,} \\ q(x) &: x \text{ es múltiplo de 5,} \\ r(x) &: x \geq 8, \end{aligned}$$

determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- a) $\forall x \in \mathbb{N} : (p(x) \vee r(x))$
- b) $\forall x \in \mathbb{N} : (\bar{p}(x) \wedge q(x))$
- c) $\exists n \in \mathbb{N} : (r(n) \Rightarrow q(n))$
- d) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : [p(n) \Rightarrow (q(n) \vee r(m))]$

P16. Considere las funciones proposicionales

$$\begin{aligned} p(x, y) &: x - y > 1, \\ q(x, y) &: 2x + 3y < 2, \end{aligned}$$

así como los conjuntos $A = \{2, 1, -1, -3\}$, $B = \{-4, 1, -1/2\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- a) $\exists x \in A, \forall y \in B : p(x, y) \Rightarrow q(x, y)$
- b) $\forall x \in B, \forall y \in A : \overline{p(x, y)} \vee q(x, y)$
- c) $\exists x \in A, \exists y \in B : p(x, y) \Leftrightarrow \overline{q(x, y)}$
- d) $\forall x \in A, \exists y \in B : p(x, y) \wedge q(x, y)$
- e) $\forall x \in B, \exists y \in B : q(x, y)$
- f) $\forall x \in B, \exists y \in A : q(x, y) \Rightarrow p(x, y)$

P17. Sea $a \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

- a) $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < 1$
- b) $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a$
- c) $a \geq 1 \Rightarrow a^2 \geq 1$
- d) $a \geq 1 \Rightarrow a^2 \geq a$

P18. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ Muestre que:

- a) $(a > 0 \wedge b > 0) \Rightarrow (\sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2})$
- b) $(a > 0 \wedge b > 0 \wedge a + b = 1) \Rightarrow (a \cdot b \leq \frac{1}{4})$
- c) $(a > 0 \wedge b > 0 \wedge a + b = 1) \Rightarrow (a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2})$

2. Conjuntos.

P1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique brevemente su respuesta.

a) $\emptyset \subseteq \emptyset$

b) $\emptyset \in \emptyset$

c) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

e) $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$

f) $\{\emptyset\} \in \emptyset$

g) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$

h) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

i) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

j) $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$

k) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$

l) $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$

m) $\{a, \emptyset\} \in \{a, \{a, \emptyset\}\}$

n) $\{a, \emptyset\} \subseteq \{a, \{a, \emptyset\}\}$

P2. Sean A , B , C y D conjuntos.

a) Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$

¿es cierto siempre que $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$? ¿y que $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$?

b) Si $A \subset B$ y $C \subset D$

¿es cierto siempre que $(A \cup C) \subset (B \cup D)$? ¿y que $(A \cap C) \subset (B \cap D)$?

P3. Sean A , B , y C conjuntos arbitrarios. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.

a) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \in C$.

b) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

c) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \in C$.

d) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \subseteq C$.

P4. Demostrar las siguientes propiedades del complemento y la diferencia:

a) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

b) $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$

P5. Sea U conjunto universo, que contiene a A , B y C . Demuestre que

a) $(A \cup B) \cup (A^c \cap B^c) = U$

b) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$

c) $A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B^c \cup C)$

d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cap C)$.

e) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.

f) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

P6. Sean A, B, C subconjuntos de U (conjunto universo). Demuestre que:

- (i) $A \Delta A = \emptyset$
- (ii) $A \Delta \emptyset = A$
- (iii) Utilizando lo anterior, demuestre que:

$$A \Delta B = C \Rightarrow A \Delta C = B$$

Indicación: Recuerde que Δ cumple las propiedades de conmutatividad y asociatividad.

P7. Pruebe que:

- a) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$
- b) $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$
- c) $A \cap (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cap C)$
- d) $A \subset B \Rightarrow A \cup (B \setminus A) = B$
- e) $A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \emptyset$
- f) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \Delta B = A \cup B$

P8. Sean A, B conjuntos. Discuta la validez de las siguientes afirmaciones:

- a) $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$.
- b) $A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$.
- c) $A \Delta B = A \Rightarrow B = \emptyset$.
- d) $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$.

P9. Responda a las siguientes preguntas:

- a) Si $A \cup B = A \cup C$, ¿es necesario que $B = C$?
- b) Si $A \cap B = A \cap C$, ¿es necesario que $B = C$?
- c) Si $A \Delta B = A \Delta C$, ¿es necesario que $B = C$?

P10. Probar que si $(A \cap X = A \cap Y) \wedge (A \cup X = A \cup Y)$, entonces $X = Y$.

P11. Sean A, B , y C conjuntos tales que $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$ y $(A \cap C^c) \subseteq (B \cap C^c)$. Demuestre que $A \subseteq B$.

P12. Considere los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| < 1\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{|x + 2| + 3}{|x|} < 23\right\}.$$

Demuestre que la proposición $(\forall x \in \mathbb{R}) (x \in A \Rightarrow x \in B)$ es verdadera.

P13. Dados los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |3x - 4| < 1\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{x + 2}{x} - 5\right| < \varepsilon\right\},$$

determine ε de modo que $A \subseteq B$.

P14. Se sabe que de un grupo de 20 personas, 10 estudian Música, 7 estudian Fotografía, 4 estudian Pintura y Fotografía, 3 estudian Música y Pintura, 2 estudian Fotografía y Música y 1 estudia Música, Fotografía y Pintura. ¿Cuántos estudian sólo Fotografía? ¿Cuántos estudian sólo Pintura?

P15. Se definen los conjuntos:

$$A = \{\text{Estudiantes de Matemática I}\}$$

$$B = \{\text{Estudiantes de Matemática II}\}$$

$$C = \{\text{Estudiantes de Computación}\}$$

$$D = \{\text{Estudiantes de Física I}\}$$

$$E = \{\text{Estudiantes de Física II}\}$$

$$F = \{\text{Estudiantes que fueron a Fantasilandia}\}$$

$$G = \{\text{Estudiantes de se acostaron muy tarde}\}$$

Expresar las siguientes proposiciones en función de los conjuntos anteriormente definidos:

- a) Todos los alumnos de Matemáticas I cursan Física I.
- b) Los estudiantes de Matemáticas II o los de Física II se acostaron tarde.
- c) Sólo los estudiantes de Matemáticas II o los de Física II se acostaron tarde.
- d) Ningún estudiante de Computación fue a Fantasilandia.
- e) A Fantasilandia fueron sólo estudiantes de Matemáticas I y Física I.
- f) Todos los estudiantes de Física I que no son ni de Matemáticas I ni de Matemáticas II fueron a Fantasilandia.

P16. Sean A, B en el universo U . Demuestre que:

$$(i) \quad A \cup B \subset A \cap B \Rightarrow A = B.$$

$$(ii) \quad A \subset A^c \Leftrightarrow A = \emptyset.$$

P17. Sean $A \subset U$ dos conjuntos. Encuentre y justifique todas las relaciones de inclusión que puedan existir entre los siguientes conjuntos:

$$(i) \quad \mathcal{P}(A \cup B) \text{ y } \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

$$(ii) \quad \mathcal{P}(A \cap B) \text{ y } \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

$$(iii) \quad \mathcal{P}(U \setminus A) \text{ y } \mathcal{P}(U) \setminus \mathcal{P}(A)$$

P18. Dar los elementos del conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

P19. Sean A, B, C conjuntos.

- (i) Probar que $C \subseteq A \cup B \Leftrightarrow (A \setminus B) \cap C = C \setminus B$.
- (ii) Probar que $A \subseteq C \Rightarrow A \setminus B = C \setminus [B \cup (C \setminus A)]$.
- (iii) Suponga que las siguientes proposiciones son verdaderas:

$$\begin{aligned} (x \in A \wedge y \in B) &\Rightarrow y \in A \\ (x \notin A \vee y \in A) &\Rightarrow y \notin B. \end{aligned}$$

Probar que $y \notin B$ es verdadera.

P20. Sea A un subconjunto fijo del conjunto E y sea $M = \{X \in \mathcal{P}(E) / A \cap X = \emptyset\}$. Probar que:

- (i) $\emptyset \in M$ y $E \setminus A \in M$.
- (ii) $A \in M \Leftrightarrow A = \emptyset \Leftrightarrow M = \mathcal{P}(E)$.
- (iii) $(\forall X \in M)(\forall Y \in \mathcal{P}(E)) X \cap Y \in M$.
- (iv) $[(X \in M) \wedge (Y \in M)] \Rightarrow [(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)] \in M$.

P21. Sea $\spadesuit$ la operación entre conjuntos definida por $A \spadesuit B = A^c \cap B^c$. Considere un universo U y $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(U)$ una colección no vacía de conjuntos tal que $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \spadesuit B \in \mathcal{F}$. Si $A, B \in \mathcal{F}$ demuestre que:

- (i) $A^c \in \mathcal{F}$
- (ii) $A \cap B \in \mathcal{F}$
- (iii) $A \cup B \in \mathcal{F}$
- (iv) $\emptyset \in \mathcal{F} \wedge U \in \mathcal{F}$

P22. Un conjunto $M \subseteq \mathcal{P}(E)$ se llama *álgebra* de las partes de E si verifica las siguientes propiedades:

- (i) $E \in M$
- (ii) $(\forall A, B \in M) A \cup B \in M$
- (iii) $(\forall A \in M) A^c \in M$

Se pide:

- (a) Demostrar que $\emptyset \in M$
- (b) Demostrar que $(\forall A, B \in M) A \cap B \in M$
- (c) Demostrar que $(\forall A, B \in M) A \Delta B \in M$
- (d) Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$, determinar si

$$M = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$$

es un *álgebra*. Si no lo es, agregar el menor número de conjuntos para que lo sea.

P23. Sean $A, B \subseteq E$ y $C, D \subseteq F$. Demuestre que:

a) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$

b) $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$

Dé un ejemplo que muestre que la otra inclusión no es siempre verdadera.

c) $(E \times F) \setminus (A \times C) = ((E \setminus A) \times F) \cup (E \times (F \setminus C))$