Pauta Control 1 - Ingenieria Aplicada

Profesores: Fernando Ordóñez - Víctor Bucarey - José Cifuentes
Profesores Auxiliares: Felipe Garrido - Valeska Ramirez

Pregunta 1

Se tiene un problema de construir dos tipos de productos, A y B, los cuales son construidos de la siguiente manera:

- El producto A se construye con 2 piezas tipo C y 4 del tipo D.
- El producto B se produce con 3 piezas tipo C y 3 del tipo D.

Por razones de producción se debe estar siempre produciendo una cantidad mínima de 3 productos. En stock solamente se tienen 18 piezas del tipo C y 24 del tipo D. Las ganancias de producir tipo A y B son 8 y 7 respectivamente.

1. (2.0 puntos) Formule el problema como un modelo de programación lineal que maximice las ganancias de la fábrica.
2. (2.0 puntos) Resuelva el problema gráficamente e índique cuanto es la máxima ganancia.
3. (1.0 puntos) ¿Cuánto debe aumentar el precio del producto A para que convenga solo hace de ese producto?
4. (1.0 puntos) ¿Cómo graficaría usted la región factible si es que las variables son enteras?

Solución:

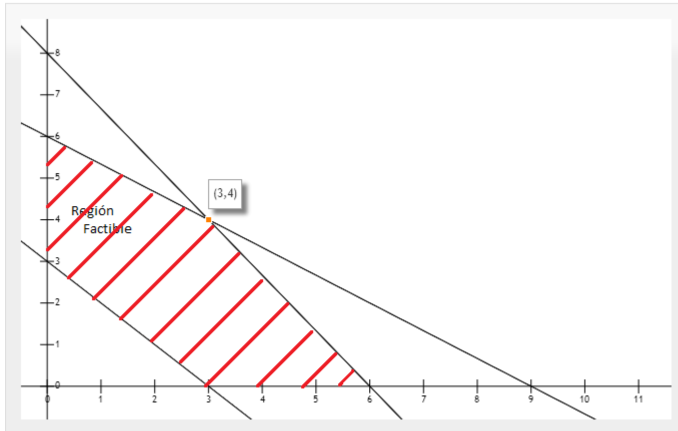
1. Sean X_a : Cantidad producida del producto A y X_B : Cantidad producida del producto B nuestras variables de decisión.

Entonces, el problema se verá modelado como:

$$\text{máx } 8X_A + 7X_B$$
$$\text{s.a } X_A + X_B \geq 3$$
$$2X_A + 3X_B \leq 18$$
$$4X_A + 3X_B \leq 24$$
$$X_A, X_B \geq 0$$

Si agregaban la condición de que las cantidades fuesen valores enteros está correcto también.

2. El gráfico de la región factible se verá así, siendo X_B el eje Y, X_A el eje X:



De acá se puede ver que el óptimo es el punto $(3, 4)$, es decir, se debe producir 3 veces el producto A y 4 el producto B. La ganancia será de \$52.

3. La máxima cantidad de producto A que se puede realizar sin salir de la región factible es 6. Luego, tenemos que ver cual es el mínimo precio que debe tener A de modo que realizar 6 de ellos sea mejor que realizar 3 A y 4 B.

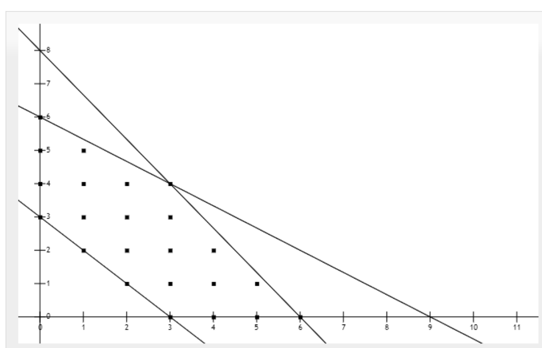
Se puede hacer de varias formas, por ejemplo, si imponemos que:

$3g_A + 28 \leq 6g_A$ donde g_A es la ganancia de A, se tiene que:

$\frac{28}{3} \leq g_A$. Como g_A debe ser un número entero, el valor mínimo será 10.

Luego, el precio de A debe aumentar en 2 de modo que sea más conveniente solo hacer ese producto.

4. Si las variables fuesen enteras la región factible debería ser así:



Donde los puntos conforman la región factible, siendo ellos las posibles soluciones.

Pregunta 2

Considere una comuna cualquiera con I vecindarios, J escuelas, y G niveles en cada escuela. Cada escuela $j \in J$ tiene una capacidad de C_{jg} para algún nivel $g \in G$. En cada vecindario $i \in I$, la cantidad de estudiantes de un nivel g es S_{ig}. Finalmente, la distancia de la escuela j al vecindario i es d_{ij} .

1. (4.0 puntos) Modelar este problema como uno de programación lineal que tiene como objetivo asignar a todos los estudiantes a las escuelas, minimizando el total de la distancia recorrida por todos los estudiantes. (Puede ignorar el hecho de que el número de estudiantes debe ser entero.)

   Hint: Le puede ser útil definir la variable x_{ijg} que indique la cantidad de alumnos que van desde el vecindario i al distrito j en el nivel g

2. (2.0 puntos) ¿Cómo cambiaría el modelo si es que en vez de decidir cuantos alumnos van desde un vecindario a otro, se debe decidir que vecindarios se deben designar a cada escuela? Mejoraría o empeoraría la función objetivo con respecto al modelo de la parte 1.

Solución:

1. Como nos dice el Hint, definimos las variables de decisión:

x_{ijg} : Cantidad de estudiantes que van desde el vecindario i a la escuela j, en el nivel g.

La función objetivo sería entonces $\min \sum_{i,j,g} d_{ij} \cdot x_{ijg}$

Como restricciones tenemos que la capacidad C_{jg} no puede ser superada, así como que la cantidad de estudiantes que salen del vecindario i debe ser igual a la disponible.

Luego, tendríamos que las restricciones son:

$$\sum_{i \in I} x_{ijg} \leq C_{jg}, \forall j \in J, g \in G$$

$$\sum_{j \in J} x_{ijg} = S_{ig}, \forall i \in I, g \in G$$

$$x_{ijg} \geq 0, \forall i, j, g$$

La última restricción sale de que claramente no podemos tener cantidades negativas.

2. Ahora, debemos modificar nuestras variables de decisión. Sean las variables binarias:

$$x_{ijg} = \begin{cases} 1 & \text{si el vecindario i va a la escuela j en el nivel g} \\ 0 & \text{en caso contario} \end{cases}$$

Entonces la función objetivo con estas variables queda definida por:

$$\min \sum_{ijg} d_{ij} \cdot x_{ijg}$$

Se tiene que este problema es un caso particular de la parte 1), en el cual todos los niños de cada vecindario son asignados a una misma escuela. Luego, la solución de este problema es en particular solución del problema de la parte anterior.

Por lo tanto, la función objetivo empeora ya que la región factible se acota aún más (se puede ver como si al problema anterior se le agregasen restricciones), por lo tanto el óptimo no tiene más opciones que, seguir igual, o empeorar.