11.1. Diferentes situaciones sobre regiones factibles y óptimos.

1. *Maximizar la función* $F(x,y) = 40x + 50y$ *sujeta a las restricciones:*

(1) $2x + 5y \leq 50$ (3) $3x + 5y \leq 55$ (5) $x \geq 0$

(2) $5x + 2y \leq 60$ (4) $x + y \leq 18$ (6) $y \geq 0$

2. *Determinar los valores máximo y mínimo de la función* $F(x,y) = 2x - 8y$ *sometida a las restricciones:*

(1) $3x - 2y \leq 12$ (3) $x - 4y \geq -20$ (5) $x \geq 0$

(2) $3x + 2y \leq 24$ (4) $x + 2y \geq 4$ (6) $y \geq 0$

3. *Hallar analítica y gráficamente el máximo y el mínimo de las funciones:*

$F_1(x,y) = 2x - y$ $F_2(x,y) = -3x - 3y$ $F_3(x,y) = -x + 2y$ $F_4(x,y) = 5x + 5y$

sometida a las restricciones: (1) $x + y \leq 10$ (2) $x + y \geq 2$ (3) $x - y \leq 5$

(4) $x - y \geq -5$ (5) $x \geq 0$ (6) $y \geq 0$

4. *Calcular los valores máximo y mínimo de la función* $F(x,y) = 2x + y$ *sujeta a las restricciones:*

(1) $0 \leq x \leq 6$ (2) $0 \leq y \leq 10$ (3) $8 \leq 2x + y \leq 16$

5. *Hallar los valores máximo y mínimo de la función* $F(x,y) = 5x - 3y$ *sujeta a las restricciones:*

(1) $x + y \leq 3$ (2) $2x + y \geq 8$ (3) $x \geq 0$ (4) $y \geq 0$

6. *a) Encontrar el máximo y el mínimo de la función* $F_1(x,y) = -4x - 2y$ *sometida a las restricciones:*

(1) $3x + y \geq 300$ (2) $x + 2y \geq 200$

b) Determinar el máximo y el mínimo de la función $F_2(x,y) = -x + 3y$ *sujeta a las mismas restricciones anteriores.*

7. *Calcular el máximo y el mínimo de cada una de las funciones:*

$F_1(x,y) = 3x + 4y$ $F_2(x,y) = 10x - 30y + 300$ $F_3(x,y) = 12x - 3y$

sometidas a las restriciones: (1) $x + y \geq 14$ (3) $4x + y \geq 16$

(2) $2x + 3y \geq 36$ (4) $x - 3y \leq 0$

8. *Calcular el máximo y el mínimo de la función* $F(x,y) = 3x + 4y$ *sujeta a las restricciones:*

(1) $x - 2y \geq 0$ (2) $2x - y \leq 0$ (3) $x + y \geq 0$

9. *Calcular el máximo y el mínimo cada una de las funciones:*

$F_1(x,y) = -x - y$ $F_2(x,y) = 2x - 2y$ $F_3(x,y) = -2x + 4y$ $F_4(x,y) = 3y$

sometidas a las restricciones: (1) $x + y \geq 4$ (2) $3x + y \geq 6$
(3) $x - 2y + 12 \geq 0$

(4) $x \geq 0$ (5) $y \geq 0$

10. *Representar la región del plano determinada por las inecuaciones:*

(1) $2x + y \geq 5$ (2) $x - y + 3 \geq 0$ (3) $x - 2y \leq 1$ (4) $2x - 11 \leq 0$

a) ¿ Cuántos puntos con las dos coordenadas enteras existen en dicha región?

b) Calcular el máximo y el mínimo, de entre todos los puntos de coordenadas enteras, de las funciones:

$$F_1(x,y) = 2x - y \qquad\qquad F_2(x,y) = -3x - 3y$$

11.2. Problemas con enunciado.

1. *Un ave de rapiña necesita para subsistir al día 30 unidades de proteínas, 20 de grasas y 8 de vitaminas. Sus presas son dos tipos de animales: ratones que le proporcionan 3 unidades de proteínas, 4 de grasas y 1 de vitaminas y palomas que le proporcionan 6 unidades de proteínas, 2 de grasas y 1 de vitaminas. Si cazar y comer un ratón le cuesta 7 unidades de energía y una paloma le cuesta 12 unidades de energía, ¿ cuántas presas de cada clase debe cazar para satisfacer sus necesidades con el menor gasto de energía ?*

2. *Con 80 kg de acero y 120 de aluminio se quieren fabricar bicicletas de montaña y de paseo que se venderán a 200 euros y 150 euros respectivamente. Para la de montaña son necesarios 1 kg de acero y 3 de aluminio y para la de paseo 2 kg de cada uno de los metales. ¿ Cuántas bicicletas de paseo y cuántas de montaña se deben fabricar para obtener el máximo beneficio ?*

3. *Para abonar un parcela de huerta se necesitan, por lo menos, 8 kg de nitrógeno y 12 kg de fósforo. Se dispone de un producto M cuyo precio es de 3 euros por kilogramo y que contiene un 10 % de nitrógeno y un 30 % de fósforo y otro producto N que contiene un 20 % de nitrógeno y un 20 % de fósforo, y cuyo precio es de 4 euros por kilogramo. ¿ Qué cantidades se deben tomar de M y N para abonar la parcela con el menor gasto posible ?*

4. *Un comerciante desea comprar dos tipos de frigoríficos, F1 y F2. Los del tipo F1 cuestan 300 euros y los del tipo F2, 500 euros. Solo dispone de sitio para 20 frigoríficos y de 7000 euros para hacer las compras. ¿ Cuántos frigoríficos ha de comprar de cada tipo para obtener beneficios máximos en la venta posterior, sabiendo que en cada frigorífico gana el 30 % del precio de compra ?*

5. *Una industria vinícola produce vino y vinagre. El doble de la producción de vino es siempre menor o igual que la producción de vinagre más cuatro unidades. Además el triple de la producción de vinagre más cuatro veces la producción de vino es siempre menor o igual que 18 unidades. Hallar el número de unidades de cada producto que se deben producir para alcanzar un beneficio máximo, sabiendo que cada unidad de vino deja un beneficio de 8 euros y cada unidad de vinagre 2 euros.*

6. *En la fabricación de piensos se utilizan tres ingredientes, P, Q, y R. Se dispone de 90 toneladas de P, 90 de Q y 70 de R, y se desea fabricar dos tipos de pienso M1 y M2. Una tonelada de pienso M1 requiere 2 toneladas de P, 1 de Q y 1 de R y se vende a 12 euros. Una tonelada de M2 requiere 1 tonelada de P, 2 de Q y 1 de R y se vende a 10 euros. ¿ Cuántas toneladas de cada pienso deben facturarse para obtener el mayor beneficio ?*

7. *Una empresa elabora dos productos, cada uno de ellos en una cantidad que es múltiplo de 1000. La demanda de ambos productos conjuntamente es mayor de 3000 unidades y menor de 6000 unidades. Se sabe que la cantidad demandada de un producto es mayor que la mitad y menor que el doble del otro. Para obtener los máximos beneficios vendiendo toda la* *producción, ¿ cuál debe ser la producción de cada uno de ellos si uno lo vende a un precio que es el triple que el del otro ?*

8. *Se quiere elaborar una dieta diaria para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenidos vitamínicos al día: 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 de la C y 2 de la D. Para ello se van a mezclar dos tipos de piensos P y Q, cuyo precio por kilogramo es para ambos de 30 pesetas, y cuyo contenido vitamínico por kg se expresa en la tabla. ¿ Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo ?*

	A	*B*	*C*	*D*
P	*1 mg*	*1 mg*	*20 mg*	*2 mg*
Q	*1 mg*	*3 mg*	*7.5 mg*	*0 mg*

9. *Un estudiante reparte propaganda publicitaria en su tiempo libre. La empresa A le paga 0.05 euros por impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes. le paga 0.07 euros por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos de tipo A, en la que le caben 120, y otra para los de tipo B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día puede repartir 150 impresos como máximo. ¿ Cuántos impresos habrá de repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo ?*

10. *Para el tratamiento de cierta enfermedad hay que suministrar a los pacientes tres tipos de vitaminas, a, b, g. Quincenalmente precisan al menos, 875 mg de vitamina a, 600 mg de vitamina b, y 400 mg de vitamina g. En el mercado dichas vitaminas están en dos productos A y B. Cada comprimido de A tiene 25 mg de vitamina a, 20 mg de vitamina b, y 30 mg de vitamina g. Cada comprimido de B tiene 35 mg de vitamina a, 30 mg de vitamina b, y 10 mg de vitamina g. El coste de cada comprimido de A es de 0.05 euros y el de B de 0.06 euros. ¿ Qué número de comprimidos de cada producto hará más económico el tratamiento ?*

11. *En una empresa se fabrican diariamente dos tipos de aparatos. A y B. Como máximo pueden fabricarse 3 aparatos de cada tipo y obligatoriamente, al menos, un aparato del tipo B. Indicar todas las posibilidades de fabricación si se quieren realizar ventas por importe superior a 60 euros,* *teniendo en cuenta que los precios de los artículos A y B son, respectivamente, 30 euros y 10 euros.*

12. *Un ganadero debe suministrar un mínimo diario de 4 mg de vitamina A y 6 mg de vitamina B en el pienso que da a sus reses. Dispone para ello de dos tipos de pienso P1 y P2 cuyos contenidos vitamínicos por kilogramo son los siguientes:*

	A	B
P1	2	6
P2	4	3

Si el kg de pienso P1 vale 0.4 euros y el de P2 vale 0.6 euros, ¿ cómo debe suministrar las vitaminas requeridas en un coste mínimo ?

13. *Un veterinario aconseja a un granjero dedicado a la cría de aves una dieta mínima que consiste en 3 unidades de hierro y 4 unidades de vitamina diarias. El granjero sabe que cada kilo de maíz proporciona 2.5 unidades de hierro y 1 de vitaminas y que cada kilo de pienso compuesto proporciona 1 de hierro y 2 de vitaminas. Sabiendo que el kilo de maíz vale 0.3 euros y el de pienso compuesto 0.52 euros, se pide:*

a) ¿ Cuál es la composición diaria de la dieta que minimiza los costes ?

b) ¿ Cambiaría la solución del problema si por escasez en el mercado, el granjero no pudiera disponer de más de 1 kilo diario de pienso compuesto ?

14. *Un agricultor utiliza un invernadero de 300 m^2 para dos tipos de cultivo. Los gastos de cada uno de ellos son de 50 y 20 euros por metro cuadrado, siendo los beneficios que se obtienen de 300 y 100 euros por metro cuadrado respectivamente. Si se dispones de 7500 euros para invertir, ¿ qué superficie debe dedicar a cada tipo de cultivo para obtener un beneficio máximo ?*

15. *Un sastre tiene 80 m^2 de tela de algodón y 120 m^2 de tela de lana. Un traje de caballero requiere 1 m^2 de algodón y 3 m^2 de lana y un vestido de señora necesita 2 m^2 de cada una de las telas. Calcular el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden por el mismo precio.*

16. *Una empresa conservera puede enlatar diariamente un máximo de 1000 kg de atún. Tiene dos tipos de envases, latas pequeñas y latas grandes, cuyo contenido neto es de 90 g y 400 g respectivamente. Por razones de producción, el número de latas pequeñas no puede superar el doble de las grandes. Si la ganancia empresarial es de 0.3 euros por lata pequeña y de 0.8 euros por lata grande, ¿ cómo debe planificarse la producción para que la ganancia sea máxima ?*

17. *Una persona quiere invertir 100000 euros en dos tipos de acciones, A y B. Las del tipo A tienen más riesgo, pero producen un beneficio del 10 %. Las del tipo B son más seguras, pero producen solo el 7 %. Decide invertir como máximo 60000 euros en acciones del tipo A y, por lo menos, 20000 euros en acciones del tipo B. Además, quiere que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B. ¿ Cómo debe invertir los 100000 euros para que el beneficio anual sea máximo ?*

18. *Se necesita una dieta que proporciones a un animal 3000 calorías y 80 unidades de proteínas por día. En el mercado hay dos alimentos básicos que pueden usarse para preparar la dieta. El alimento A1 cuesta o.20 euros por kilo y contiene 600 calorías y 2 unidades de proteínas. El alimento A2 cuesta o.10 euros por kilo y contiene 50 calorías y 8 unidades de proteínas. Determinar la combinación de alimentos más barata que satisfaga las necesidades de la dieta.*

19. *Una empresa tiene dos centros de producción C1 y C2 en los que fabrica tres tipos de artículos: A1, A2 y A3. Dicha empresa debe fabricar diariamente un mínimo de 360 unidades del artículo A1, 320 del A2 y 180 del A3. La producción por hora en cada centro es: en C1, 25 de A1, 30 de A2 y 10 de A3; en C2, 30 de A1, 20 de A2 y 18 de A3. Si cada hora de funcionamiento cuesta 800 euros en C1 y 1000 en C2, ¿ cuántas horas debe* *funcionar cada centro para que produciendo, al menos, lo necesario, se reduzcan al mínimo los costes de producción ?*

20. *Un pastelero fabrica dos tipos de pasteles de chocolate C1 y C2. El pastel C1 se hace con 1 litro de leche y 0.2 kilos de cacao y el pastel C2 con 1 litro de leche y 0.4 kilos de cacao. Por cada pastel del tipo C1 se obtiene un beneficio de 2 euros y por cada pastel del tipo C2 se obtiene un beneficio de 3.5 euros. La maquinaria disponible sólo permite fabricar como máximo 100 pasteles de cada tipo al día. Si le suministran diariamente 120 litros de leche y 40 kilos de cacao, ¿ cuántos pasteles de cada tipo debe fabricar y vender para que el beneficio obtenido sea máximo ?*

21. *Dos almacenes A y B distribuyen fruta a tres mercados. El almacén A dispone de 15 toneladas de fruta diarias y el B de 20 toneladas, que reparten en su totalidad. Los tres mercados necesitan diariamente 12, 13 y 10 toneladas de fruta, respectivamente. Si el coste del transporte desde cada almacén a cada mercado está representado en la tabla, ¿ cómo se debería planificar el transporte de forma que el coste sea mínimo ?*

Almacén	*Mercado 1*	*Mercado 2*	*Mercado 3*
A	*5*	*10*	*20*
B	*8*	*15*	*10*

22. *Dos yacimientos de oro A y B producen al año 2000 kg y 3000 kg de mineral de oro, respectivamente, que deben distribuirse a tres puntos de elaboración: C, D y E, que admiten 500 kg, 3500 kg y 1000 kg de mineral, respectivamente, al año. El coste del transporte en euros por kilogramo es el de la siguiente tabla. ¿ Cómo ha de distribuirse el mineral para que el transporte sea lo más económico posible ?*

Coste	*C*	*D*	*E*
A	*10*	*20*	*30*
B	*15*	*17.5*	*20*

23. *Para abastecer de madera a tres aserraderos A1, A2 y A3, hay dos* *bosques, B1 y B2, que producen 26 y 30 toneladas respectivamente. Las necesidades de cada aserradero son: 20, 22 y 14 toneladas, respectivamente. Si los costes del transporte por tonelada de los bosques a los aserraderos son, en euros, los que figuran en la tabla, planificar el transporte de coste mínimo.*

	A1	*A2*	*A3*
B1	*10*	*30*	*10*
B2	*20*	*10*	*10*

24. *Una empresa compra en un lugar P 50000 unidades de un determinado producto y en un lugar G, 40000 unidades del mismo producto. Estas cantidades las guarda en tres almacenes A con capacidad para 20000 unidades, B con 30000 y C con 40000. El precio en euros de llevar una unidad del producto desde los lugares de compra hasta los almacenes viene indicado en la tabla siguiente. ¿ Cómo debe planificarse el almacenado del producto para que los gastos de transporte sean mínimos ?*

	A	*B*	*C*
P	*60*	*180*	*100*
G	*80*	*120*	*140*

Luis Barrios Calmaestra