

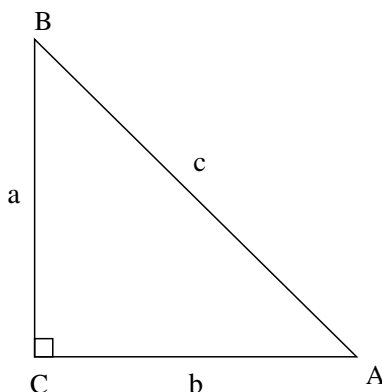
Guía de Reforzamiento N° 2

“Teorema de Pitágoras y Trigonometría”

María Angélica Vega
Guillermo González
Patricio Sepúlveda

19 de Enero de 2011

1 TEOREMA DE PITÁGORAS



El Teorema de Pitágoras afirma que si el triángulo ABC es rectángulo, entonces la suma de los catetos al cuadrado es igual al cuadrado de la hipotenusa.

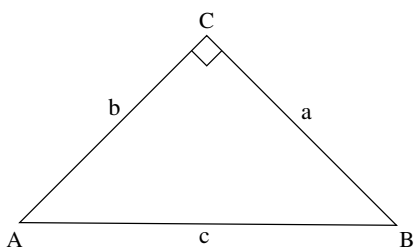
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Además podemos decir que el recíproco del teorema de pitágoras también es cierto, es decir, si los tres lados de un triángulo ABC cualquiera cumplen con la relación $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

1.1 EJEMPLOS

1. Según el triángulo ABC (rectángulo en C) de la figura, calcule el valor de c .

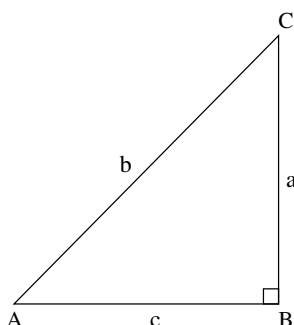
$a = 12 \text{ cm.}$
 $b = 16 \text{ cm.}$



Solución: $c^2 = a^2 + b^2$
 $c^2 = 12^2 + 16^2$
 $c^2 = 144 + 256$
 $c^2 = 400$
 $c = \sqrt{400} \text{ cm}$
 $c = 20 \text{ cm}$

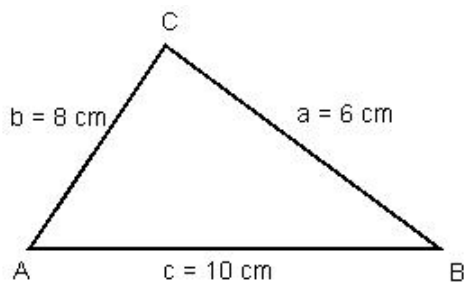
2. Según el triángulo ABC (rectángulo en B) de la figura, calcule el valor de c .

$a = 5 \text{ mm.}$
 $b = 13 \text{ mm.}$



Solución: $b^2 = c^2 + a^2$
 $c^2 = b^2 - a^2$
 $c^2 = 13^2 - 5^2$
 $c^2 = 169 - 25$
 $c^2 = 144$
 $c = \sqrt{144} \text{ mm}$
 $c = 12 \text{ mm}$

3. Verifique que el triángulo ABC de la figura es un triángulo rectángulo.



Solución:

$$a^2 = 6^2 \text{ cm}^2 = 36 \text{ cm}^2$$

$$b^2 = 8^2 \text{ cm}^2 = 64 \text{ cm}^2$$

$$c^2 = 10^2 \text{ cm}^2 = 100 \text{ cm}^2$$

Claramente $a^2 + b^2 = c^2$, entonces por el recíproco del teorema de pitágoras podemos afirmar que el triángulo ABC es rectángulo en C .

1.2 EJERCICIOS

1. Verifica si los siguientes lados corresponden a los de un triángulo rectángulo.

- (a) 8 m, 10 m, 12 m.
- (b) 5 m, 12 m, 13 m.
- (c) 8 m, 13 m, 16 m.
- (d) 15 m, 20 m, 25 m.

2. En cada caso encuentra la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo, sabiendo que la medida de los catetos son:

- (a) 3 cm, 4 cm.
- (b) 10 cm, 24 cm.
- (c) 12 cm, 16 cm.
- (d) 6 m, 8 m.

3. Calcula la diagonal del rectángulo sabiendo que sus lados miden:

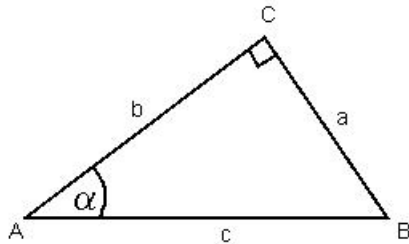
- (a) largo 4 cm, ancho 3 cm.
- (b) largo 8 cm, ancho 6 cm.
- (c) largo 5 cm, ancho 12 cm.

4. Para mantener en posición vertical un poste de la luz se emplea un cable de 15 m de largo que va desde lo alto del poste a una estaca clavada a 9 m de distancia de la base del poste. ¿Qué altura tiene el poste?

2 TRIGONOMETRÍA

2.1 Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Dado un triángulo rectángulo ABC , como el de la figura, rectángulo en C , definamos las siguientes razones trigonométricas para el ángulo agudo alfa (α).



$$\textit{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\textit{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{c}{a}$$

$$\textit{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\textit{sec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\textit{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha} = \frac{a}{b}$$

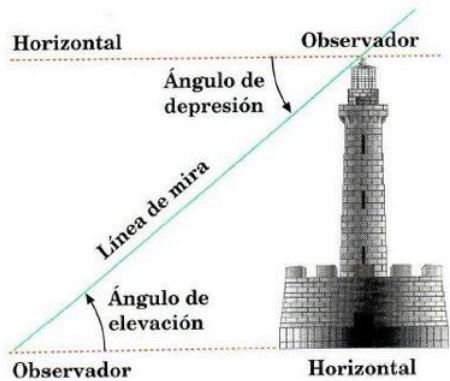
$$\textit{cotg } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opuesto a } \alpha} = \frac{b}{a}$$

2.2 Razones trigonométricas de ángulos importantes

	0°	30°	45°	60°	90°
$\textit{sen } ()$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\textit{cos } ()$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\textit{tg } ()$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe

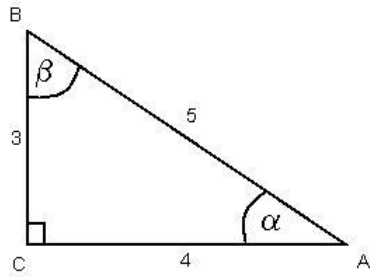
2.3 Ángulo de elevación y de depresión

Son aquellos ángulos formados por la horizontal, considerada a nivel del ojo del observador y la línea de mira, según que el objeto observado esté por sobre o bajo esta última. Con respecto a un observador, los ángulos de elevación y de depresión constituyen ángulos alternos internos entre paralelas, por lo tanto, sus medidas son iguales.



2.4 EJEMPLOS

1. Considere el triángulo ABC de la figura, con catetos $AC = 4\text{ cm}$, $BC = 3\text{ cm}$ e hipotenusa $AB = 5\text{ cm}$. Calculemos respecto de los ángulos agudos α y β las razones trigonométricas fundamentales.



Solución:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\cos \beta = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3} = 1,\bar{3}$$

2. Considere un triángulo ABC rectángulo en C , donde $\cos \alpha = 5/7$. Determine el valor de $\sec \alpha$, $\operatorname{cosec} \alpha$ y $\cotg \alpha$.

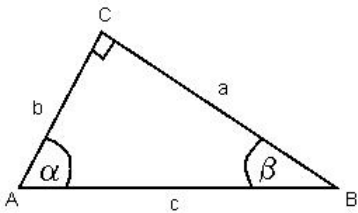
Solución:

Como $\cos \alpha = 5/7$, esto significa que en el triángulo ABC se tiene:

$$b = 5u$$

$$c = 7u$$

y $a = \sqrt{7^2 - 5^2} = \sqrt{24}u = 2\sqrt{6}u$, donde u es algún número real distinto de cero.



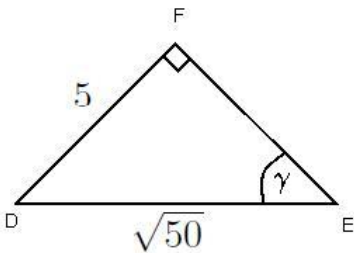
Por lo tanto

$$\sec \alpha = \frac{7}{5} = 1,4$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{7}{2\sqrt{6}} \approx 1,43$$

$$\cotg \alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}} \approx 1,02$$

3. Considerando el triángulo DEF , calcule la medida del ángulo γ .



Solución:

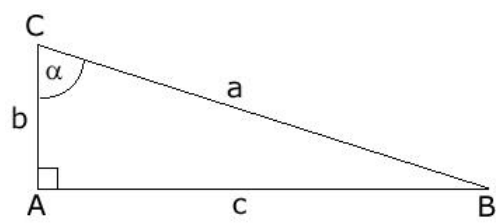
$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5\sqrt{50}}{50} = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Según la tabla (sección 2.2), $\frac{\sqrt{2}}{2}$ corresponde al seno de 45° , por lo tanto, $\gamma = 45^\circ$.

2.5 EJERCICIOS DE SELECCIÓN MÚLTIPLE

1. En la figura, $\cos \alpha = 0,15$ y $b = 1,5\text{ cm}$. Entonces, ¿cuál es la medida de la hipotenusa?

- (a) 100 cm
- (b) 15 cm
- (c) $12,5\text{ cm}$
- (d) 10 cm
- (e) 1 cm



2. $-\operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{sen} 30^\circ + \cos^2 60^\circ =$

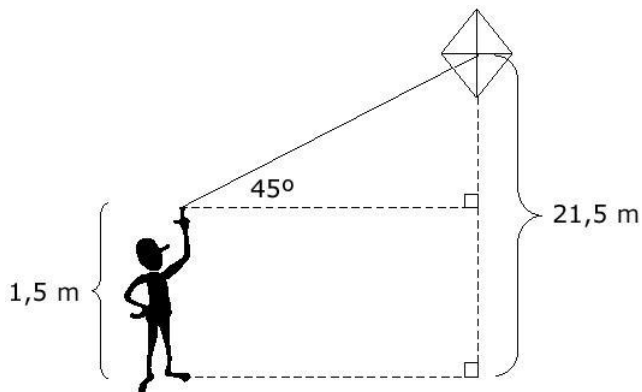
- (a) $-\frac{3}{4}$
- (b) $-\frac{1}{4}$
- (c) 0
- (d) $\frac{1}{4}$
- (e) $\frac{3}{4}$

3. Para determinar la altura de un poste, Cristian se ha alejado 7 metros de su base y ha medido el ángulo que forma la visual al punto más alto del poste, obteniendo un valor de 40° . Si Cristian ignora su propia altura, ¿cuál es la altura del poste?

- (a) $7 \cdot \operatorname{tg}(40^\circ)$
- (b) $7 \cdot \cos(40^\circ)$
- (c) $7 \cdot \operatorname{cosec}(40^\circ)$
- (d) $7 \cdot \operatorname{cotg}(40^\circ)$
- (e) Falta información.

4. ¿Cuál es la longitud del hilo que sujeta el volantín de la figura, si el ángulo de elevación es de 45° ?

- (a) $21,5\sqrt{2}\text{ m}$
- (b) $21,5\text{ m}$
- (c) $20\sqrt{2}\text{ m}$
- (d) 20 m
- (e) $10\sqrt{2}\text{ m}$



5. $\operatorname{sen}^2(89) + \operatorname{sen}^2(1) =$

- (a) 89
- (b) 1
- (c) 90
- (d) $89^2 + 1$
- (e) No se puede determinar.

SOLUCIÓN EJERCICIOS TEOREMA DE PITÁGORAS

1. Consiste en verificar si satisface el teorema de pitágoras
- (a) $8^2 + 10^2 \neq 12^2$, luego no son los lados de un triángulo rectángulo.
 - (b) $5^2 + 12^2 = 13^2$, luego si son los lados de un triángulo rectángulo.
 - (c) $8^2 + 13^2 \neq 16^2$, luego no son los lados de un triángulo rectángulo.
 - (d) $15^2 + 20^2 = 25^2$, luego si son los lados de un triángulo rectángulo.
2. Consiste en calcular la suma de los cuadrados de los catetos y luego encontrar el valor de la hipotenusa a través del teorema de pitágoras.
- (a) $3^2 + 4^2 = 25$, luego la hipotenusa vale 5 *cm*.
 - (b) $10^2 + 24^2 = 676$, luego la hipotenusa vale 26 *cm*.
 - (c) $12^2 + 16^2 = 400$, luego la hipotenusa vale 20 *cm*.
 - (d) $6^2 + 8^2 = 100$, luego la hipotenusa vale 10 *m*.
3. En este caso podemos considerar el largo y el ancho como los catetos, y la diagonal como la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Entonces:
- (a) $4^2 + 3^2 = 25$, luego la diagonal vale 5 *cm*.
 - (b) $8^2 + 6^2 = 100$, luego la diagonal vale 10 *cm*.
 - (c) $5^2 + 12^2 = 169$, luego la diagonal vale 13 *cm*.
4. En este ejercicio podemos considerar lo siguiente:
- La distancia entre lo alto del poste y la estaca (que se encuentra en el suelo) se puede considerar como la hipotenusa de un triángulo rectángulo.
 - La distancia entre la estaca y el poste se puede considerar como uno de los catetos del triángulo rectángulo.
 - La altura del poste correspondería al otro cateto del triángulo rectángulo.

Aplicando el teorema de pitágoras se obtiene:

$$\begin{aligned} 15^2 &= 9^2 + h^2 \\ h^2 &= 225 - 81 \\ h^2 &= 144 \end{aligned}$$

Por lo tanto la altura del poste es de 12 *m*.

SOLUCIÓN EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA

Selección Múltiple	
<i>Pregunta</i>	<i>Alternativa</i>
1	D
2	B
3	A
4	C
5	B