# Escuela de Ingeniería - Universidad de Chile

## Escuela de Verano 2011

# Matemáticas III

Profesor: Pablo Dartnell

Auxiliares: Roberto Castillo y Andrés Zúñiga

## Guía de Problemas N° 3 *

## Axioma del Supremo - Sucesiones - Límites y Continuidad

### I.- Problemas de Axioma del Supremo.

**P1.-** Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones.

*a*) 1 es el supremo de (i) $[-10, 2[$ (ii) $[1, \infty[$ (iii) $]1, \infty[$

*b*) -1 es el máximo de (i) $]-\infty, 1[$ (ii) $]-2, -1[$ (iii) $[-3, -1] \cup \{1\}$

*c*) Los números naturales son acotados inferiormente.

*d*) Los números enteros son acotados.

**P2.-** Encuentre el supremo, ínfimo, máximo y mínimo de las siguientes conjuntos:

(i) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$

(ii) $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x \cdot n < 1\}$

(iii) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

(iv) $\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}, x \in [1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]\}$

**P3.-** Sean $S$ y $T$ subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que para todo $x \in S$ y para todo $y \in T$ $x \leq y$. Probar que $S$ tiene supremo, que $T$ tiene ínfimo y que $sup(S) \leq inf(T)$.

**P4.-** *a*) Sea $A$ subconjunto de $\mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente y $c \geq 0$. Pruebe que el conjunto $cA = \{cx : x \in A\}$ es acotado superiormente y que $sup(A) \cdot c = sup(cA)$.

*b*) Sean $A$ y $B$ conjuntos de reales no negativos, no vacíos y acotados superiormente. Probar que $AB$ es acotado superiormente y $sup(AB) = sup(A) \cdot sup(B)$.
Nota: $AB = \{x \cdot y : x \in A, y \in B\}$.

**P5.-** Muestre que $sup(\sqrt{A}) = \sqrt{sup(A)}$ donde $A \subset \mathbb{R}_+$ es no vacío y acotado superiormente y $\sqrt{A} = \{\sqrt{x} : x \in A\}$.

*Esta guía fue extraída del material de apoyo confeccionada por el Departamento de Ingeniería Matemática para el curso de Cálculo dictado en Plan Común.

**P6.-** Demuestre que si $A$ y $B$ son acotados superiormente y no vacíos entonces también lo es $A \cup B$.

**P7.-** *a*) Sean $A, B$ y $C$ subconjuntos de $\mathbb{R}$ no vacíos y acotados. Pruebe que si para todo $x \in A$ y todo $y \in B$ existe $z \in C$ tal que $x + y \leq z$ entonces : $sup(A) + sup(B) \leq sup(C)$.

*b*) Demuestre que si $C = A + B$ entonces $sup(A) + sup(B) = sup(C)$.

**P8.-** Probar que $\inf \left\{ \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N} \right\} = 0$

**P9.-** Dado el conjunto $A = \left\{ \frac{3n-1}{2n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$
(i) Analice la existencia de ínfimo y mínimo
(ii) Demuestre que el supremo existe, y es $s = \frac{3}{2}$

**P10.-** Sea b un número real. Definamos el conjunto
$A = \{x \in \mathbb{R} \ (\forall \varepsilon > 0) \ x \leq b + \varepsilon\}$
Pruebe que A es acotado superiormente y que tiene un supremo. Demuestre además que $\sup A = b$ ¿Tiene $A$ un máximo?

**P11.-** (i) Demostrar que el ínfimo del conjunto $(a, +\infty)$ es $a$.

(ii) Pruebe que dos reales $x$ e $y$ para los cuales se cumple que

$$\forall b \in \mathbb{R}, \ b > 1 \text{ implica } x < b \cdot y,$$

satisfacen la relación $x \leq y$.

**P12.-** Se dice que una función $f : X \to \mathbb{R}$ está acotada superiormente cuando su imagen $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ es un conjunto acotado superiormente. Entonces se escribe $sup\ (f) = \ sup\ \{f(x) : x \in X\}$. Pruebe que:

(a) Si $f, g \ : X \to \mathbb{R}$ están acotadas superiormente, entonces lo mismo ocurre con la suma $f + g \ : \ X \to \mathbb{R} \quad \big((f+g)(x) = f(x) + g(x)\big)$

(b) $sup\ (f + g) \leq sup\ (f) + sup\ (g)$. Dé un ejemplo donde la desigualdad es estricta.

## II.- Problemas de Sucesiones.

**P13.-** Usando la definición de límite de una sucesión demostrar que

*a*) (i) $\lim \frac{3n}{1-n} = -3$
(ii) $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
(iii) $\lim \frac{2n^2+1}{3n^2+6n+2} = \frac{2}{3}$
(iv) $\lim \frac{n \cdot \cos(n\pi)}{n^2+1} = 0.$

**P14.-** Sea $(u_n)$ una sucesión que verifica $(\exists n_0)(\forall \varepsilon > 0)\;\; n > n_0 \Rightarrow |u_n - u| < \varepsilon$
Probar que el número de términos distintos de la sucesión es finito.

**P15.-** *a*) Probar que si $a \geq b > 0$ entonces $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = a$.

*b*) Sean $a_1, \ldots, a_k$ reales positivos. Probar que la sucesión $(\sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_k^n})$ converge y calcular su límite.

**P16.-** Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que: $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{x_{n+1}}{x_n}| = r < 1$,

*a*) Pruebe que: $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\;\; |x_{n+1}| \leq (r+\epsilon)|x_n|$.
(Ind: $|x| - |y| \leq |x - y|$).

*b*) Concluya que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

**P17.-** Sea $(a_n)$ una sucesión de números reales. Se dice que $a_n \to +\infty$ ($(a_n)$ diverge a $+\infty$) ssi se cumple la siguiente propiedad $(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\;\; a_n \geq M$

*a*) Probar que $a_n \to +\infty$ implica que $\frac{1}{a_n} \to 0$. ¿Es válido el recíproco?.

*b*) Probar que $a_n \to +\infty$ y $b_n \to l > 0$ implica que $a_n b_n \to +\infty$.

*c*) Mostrar con ejemplos que si $a_n \to +\infty$ y $b_n \to 0$, pueden tenerse los casos: $a_n b_n \to 0$, $a_n b_n \to +\infty$ y $a_n b_n \to l \neq 0$. ¿Son posibles otros casos?.

**P18.-** Probar que si $(a_n)$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con $M$ fijo en $\mathbb{R}$, entonces $(s_n)$ converge.

**P19.-** *a*) Calcular $\alpha$ y $\beta$ tales que $\lim(\sqrt{n^2 + n + 1} - (\alpha n + \beta)) = 0$

*b*) Si se sabe que $\lim n(\sqrt{n^2 + n + 1} - (\alpha n + \beta))$ existe se pide calcular su valor.

**P20.-** Sean $a, b \in \mathbb{R}_+$. Se definen las sucesiones $(x_n)$ e $(y_n)$ mediante la recurrencia

*a*) $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ e $y_1 = b$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$. Probar que se trata de sucesiones monótonas y que $\lim x_n = \lim y_n$.

*b*) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ e $y_n = x_n - \frac{1}{n}$. Probar que $x_n$ e $y_n$ son convergentes y que tienen igual límite.

**P21.-** Sea $u_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$. Probar que $\lim \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} = \frac{1}{2}$.

**P22.-** Probar que si $(a_n)$ es una sucesión de términos positivos convergente a $l > 0$, entonces,

*a*) Si se cumple que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 0$ entonces $\lim \sqrt[n]{a_n} = l$

*b*) Usando lo anterior concluya los valores de $\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ y $\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

**P23.-** Sean $(a_n)$ y $(b_n)$ sucesiones definidas por la recurrencia $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ y $b_{n+1} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \sqrt{a_n b_n}$ con $a_0 > b_0 > 0$.

*a*) Pruebe que $(a_n)$ es decreciente. Concluya que $(b_n)$ también lo es.

*b*) Muestre que $(a_n)$ y $(b_n)$ son acotadas inferiormente. Concluya que ambas convergen.

*c*) Calcule los límites de ambas sucesiones.

Indicación: Para probar que $(a_n)$ es decreciente muestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Para ello observe que $\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_0}{a_0}$.

**P24.-** Considere la sucesión $(s_n)$ definida por la recurrencia

$$s_{n+1} = \sqrt{\frac{a^3 + s_n^2}{a+1}}$$

con $a > 0$ y $s_1 \geq a$.

*a*) Demuestre usando inducción que: $\forall n \in \mathbb{N} \;\; s_n \geq a$.

*b*) Muestre que $(s_n)$ es decreciente y concluya que su límite existe.

*c*) Calcule este límite.

**P25.-** Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones reales tales que $a_n$ es creciente, $b_n$ es decreciente y

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Si $A = \{a_n \mid \; n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, demuestre que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

(b) Demuestre que $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $c$ es cota superior de $A$ y a la vez, cota inferior de $B$.

(c) Suponga ahora que $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Demuestre que el $c$ de la parte anterior es único.

**P26.-** (a) Sea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2} = L$$

Determine el valor de $L$ y demuestre por definición que es efectivamente el límite.

(b) [*La media de Cèsaro*] Sea $a_n \to a$. Pruebe por definición que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = a$$

(c) Pruebe que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2^n+5} = 0$$

**P27.-** (i) Sea $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Si $b < l$, demuestre que:

$$(\exists N \in \mathbb{N}) \quad tq \quad (\forall n \geq N)\ b < x_n$$

(ii) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente. Si $x_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$, demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq b$.

(iii) Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A$ acotado superiormente, $B$ acotado inferiormente. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones tales que $x_n \in A$ , $y_n \in B \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Demuestre que si $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$ , entonces $inf\ (B) \leq sup\ (A)$.

## III.- Problemas de Funciones Continuas y Límites de Funciones.

**P28.-** Sea la función $f : A \to \mathbb{R}$ Demuestre que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = u$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{u}$

**P29.-** Demuestre por definición:

$$\text{(i)} \lim_{x\to 3} \frac{5}{x-2} = 5 \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4} \qquad \text{(iii)} \lim_{x\to 8} \sqrt{x+1} = 3$$

**P30.-** Sea la función $f : A \to \mathbb{R}$, y $x_0 \in A$. Demuestre que

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \iff \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = l$

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \iff \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - l) = 0$

**P31.-** Sean $a, x_0, b$ tales que $a < x_0 < b$ y $f$ una función cuyo dominio incluye al conjunto $[a, x_0[ \cup ]x_0, b[$. Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l \iff \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = l$.

**P32.-** Determinar puntos de continuidad de las siguientes funciones

$a)$ (i) $\frac{1}{x}$ (ii) $x^2$ (iii) $\frac{x^3-x}{x-1}$.

$b)$ (i) $\frac{sen(x)}{x}$ (ii) $\frac{cos(x)}{x+1}$

**P33.-** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(\exists L \in \mathbb{R}^+)(\forall x, y \in \mathbb{R})$, $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$, demuestre que $f$ es continua.

**P34.-** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes propiedades:

*a*) $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x) + f(y)$

*b*) $f$ es continua en 0. Demuestre que:

i) $f$ es continua

ii) $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x \cdot f(1)$

**P35.-** Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

*a*) Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ |f(x)| \leq |x|$

*b*) Pruebe que $f$ es continua en 0.

**P36.-** Sea $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ una función que satisface

$$h(x \cdot y) = h(x) + h(y)$$

Muestre que si $h$ es continua en $x = 1$ entonces es continua en todo punto de su dominio. (Ind: Demuestre que $h(1) = 0$).

**P37.-** Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones que satisfacen la relación

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad f(x) \geq f(y) + g(y)(y - x)$$

*a*) Muestre que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad g(x)(y-x) \geq f(x) - f(y) \geq g(y)(y-x)$$

*b*) Probar que si $g$ es una función acotada entonces $f$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

**P38.-** Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, se define la función $f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = \max\{g(t) : t \in [0, x]\}$. Demostrar que si $x_0 \in \mathbb{R}_+$ es tal que: $g(x_0) < f(x_0)$, entonces $(\exists \epsilon > 0)$ tal que $f$ es constante en el intervalo $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$

**P39.-** Considere la funcion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} sen(\pi/2x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \alpha & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$

Demostrar que no hay forma de elegir $\alpha$ de modo que $f$ sea continua en 0.

**P40.-** Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x(x-1)}$ y reparar sus discontinuidades.

**P41.-** Calcular los siguientes límites si es que existen:

$$\text{(i)} \ \lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x - a} \qquad \text{(ii)} \ \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{\operatorname{sen}(mx)}\ ,\ m \neq 0, n \neq 0$$

**P42.-** Determinar el dominio y estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{e^{2x} - 1}$.
¿Cómo se debe definir $f$ en $x = 0$ de modo que resulte continua en dicho punto?
*Indicación:* Recordar que $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, x < 1$.

**P43.-** Determine el dominio y puntos de continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x + ln(x) & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ arctg((x-2)^2) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

**P44.-** Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) > 0$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

**P45.-** Para

$$f(x) = e^{1/x} \cdot \frac{(1-x)^2}{(x-2)}$$

Determinar:

*a*) Dominio, ceros y signos.
*b*) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
*c*) Conjunto de puntos de continuidad.
*d*) Gráfico.

**P46.-** Determinar el conjunto de parámetros $(a, b, c)$ con $a, b, c > 0$ para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a \cdot \operatorname{sen}(bx)}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\ln(c + (a+b)x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$.