Escuela de Ingeniería - Universidad de Chile

Escuela de Verano 2011

Matemáticas III

Profesor: Pablo Dartnell

Auxiliares: Roberto Castillo y Andrés Zúñiga

Guía de Problemas N° 2 *

Funciones - Inducción - Sumatorias

P1.- Sean $f : E \to F$ y $g : F \to E$ dos funciones tales que $g \circ f = id_E$. Probar que f es inyectiva y que g es sobreyectiva.

P2.- Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definidas en cada $n \in \mathbb{N}$ por $f(n) = 2n + 1$ y $g(n) = n^2 + 1$. Recuerde que $f \circ g(n) = f(g(n))$.

(i) Determinar si f y g son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

(ii) Determinar $f \circ g$ y $g \circ f$.

P3.- Sea la función $f : [3, +\infty) \to [2, +\infty)$ tal que $f(x) = x^2 - 6x + 11$ en cada $x \geq 3$. Demostrar que f es biyectiva.

P4.- Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, y $f : A \to \mathbb{R}$ la función tal que $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - x$, en cada $x \in A$. Demostrar que si $A \subseteq \mathbb{Q}$ entonces f es inyectiva.

P5.- Sea F el conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\varphi : F \to \mathbb{R}$ que a cada $f \in F$ le asocia $\varphi(f) = f(0)$. Demuestre que φ es una función sobreyectiva.

P6.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que verifica para cada $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) = x + 1$.

(i) Probar que f es una función biyectiva.

(ii) Probar que no es cierto que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para cualquier par de reales x e y.

P7.- Sean $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ y $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tres funciones definidas en cada $x \in \mathbb{Z}$ como $f(x) = 1 - x$, $g(x) = -x - 1$ y $h(x) = x + 2$.

(i) Probar que $h \circ g \circ f = g \circ f \circ h = id_{\mathbb{Z}}$.

---

*Esta guía fue extraída del material de apoyo confeccionada por el Departamento de Ingeniería Matemática para el curso de Álgebra dictado en Plan Común.

P8.- Sean $E \neq \emptyset$ y $A \subseteq E$ (fijo). Se definen las funciones f y g de $\mathcal{P}(E)$ en $\mathcal{P}(E)$ tales que: $f(X) = A \cup X$ y $g(X) = A \cap X$, para todo $X \subseteq E$.

(i) Determinar $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(A^c)$ y $f(E)$.

(ii) Demostrar que $g \circ f = f \circ g$.

(iii) Determinar si f y g son sobreyectivas.

(iv) Determinar un conjunto A para el cual f es biyectiva.

(v) Determinar un conjunto A para el cual g es biyectiva.

P9.- Sea E un conjunto y $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ la función que a todo $X \subseteq E$ le asigna $f(X) = E \setminus X$.

(i) Estudiar la inyectividad y sobreyectividad de f.

(ii) Determinar $f \circ f$, si existe.

(iii) Suponga que $E = \{0, 1, 2\}$. Si $A = \{\{0\}, \{1, 2\}\}$ y $B = \{\emptyset, \{1\}\}$, calcular $f(A)$.

P10.- Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se define la función $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por la fórmula $f_{a,b}(x) = ax + b$ en cada $x \in \mathbb{R}$.

(i) Demuestre que $f_{1,b} \circ f_{a,0} = f_{a,b}$.

(ii) Para $a \neq 0$, demuestre que $f_{a,b}$ es biyectiva.

(iii) Para $a \neq 0$ determine $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $f_{a,b} \circ f_{p,q} = f_{b,a}$.

P11.- Considere $A = \{1, ..., n\}$. Sea $B \subseteq A$, $B \neq A$, un subconjunto estricto de A. Defina el conjunto $G_B = \{f : A \to A \ / \ f \text{ es biyección y } f(i) = i, \ \forall \ i \in B\}$ de todas las biyecciones que dejan invariante B.

(i) Pruebe que $G_B \neq \emptyset$.

(ii) Pruebe que si $f \in G_B$ y $g \in G_B$ entonces $g \circ f \in G_B$.

P12.- Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ una función con la propiedad siguiente: $f(n + m) = f(n) + f(m)$ para cada par de enteros n y m.

(i) Probar que $f(0) = 0$.

(ii) Probar que $f(-m) = -f(m)$ para cada $m \in \mathbb{Z}$.

P13.- Considere las funciones $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ definida en cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ por $f(n) = \frac{1}{2n}$ y $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida en cada $q \in \mathbb{Q}$ por $g(q) = \frac{q}{2}$.

(a) Determine si f, g y $g \circ f$ son inyectivas, epiyectivas y biyectivas.

P14.- (a) Probar que para todo A, B, C conjuntos se tiene,

(a.1) $A \Delta B = A \Delta C \;\Rightarrow\; B = C$,
(a.2) $A \Delta B = C \;\Rightarrow\; B = A \Delta C$,

(b) Sea E un conjunto y A un subconjunto de E. Se define la función $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ como $f(X) = X \Delta A$ para cada $X \subseteq E$. Probar que f es biyectiva .

P15.- (a) Sea U un universo y $f : \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$ la función definida por

$$f(X) = X^c$$

Demuestre que f es biyectiva.

(b) Sea P un conjunto de proposiciones, con 3 o más elementos y $f : P \longrightarrow \mathbb{N}$ una función que satisface:

$$(\forall p, q \in P) : \; \big[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (f(p) \leq f(q))\big]$$

(i) Demuestre que $(\forall p, q \in P) : \big[(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (f(p) = f(q))\big]$
(ii) Demuestre que f no es ni inyectiva, ni sobreyectiva.

P16.- (a) Sea $f : A \to B$ función, con A y B conjuntos no vacíos. Muestre que

$$[(\forall C \neq \phi \text{ conjunto})(\forall g, h : B \to C \text{ funciones}) \; g \circ f = h \circ f \;\Rightarrow g = h] \iff f \text{ es epiyectiva.}$$

(b) Sean A y B conjuntos, con $A \neq \phi$ y $B \neq \phi$. Para cada $C \in \mathcal{P}(A \times B)$ se define la función

$$f_C : A \to \mathcal{P}(B),$$

tal que para $x \in A$,

$$f_C(x) = \{y \in B / (x, y) \in C\}.$$

Sea ahora la función $H : \mathcal{P}(A \times B) \to \mathcal{K}$ tal que $H(W) = f_W$, para $W \in \mathcal{P}(A \times B)$, donde $\mathcal{K} = \{g : A \to \mathcal{P}(B) / g \text{ es función}\}$.

(i) Calcule f_ϕ.
(ii) Demuestre que si $E \subseteq A$ y $F \subseteq B$, entonces para $x \in A$ se tiene que

$$f_{E \times F}(x) = \begin{cases} F & si \quad x \in E \\ \phi & si \quad x \notin E \end{cases}$$

(iii) Demuestre que H es inyectiva.

P17.- *a*) Probar **sin usar inducción** que para cada natural $n \geq 1$,

$$\sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \binom{n+2}{3}$$

Nota: Recuerde que $\sum_{k=0}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

b) Sean k, p, n naturales tales que $0 \leq k \leq p \leq n$. Pruebe las siguientes igualdades:

1) $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$

2) $\binom{n}{0}\binom{n}{p} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1} + ... + \binom{n}{p}\binom{n-p}{0} = 2^p\binom{n}{p}$.

P18.- *a*) Ocupando sumas conocidas encuentre la fórmula de:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n-1) \cdot n.$$

y demuéstrela por inducción

b) Demuestre que:

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n,$$

donde $a + b > 0$, $a \neq b$ y $n \geq 2$.

P19.- Probar por inducción que:

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad n^3 + 5n$ es divisible por 6.

b) $\forall\, n \geq 1, \quad 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ es divisible por 6.

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7.

d) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k(2k+1) = \alpha n$, y determine el valor de la constante α.

e) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, (x-y)$ divide a $x^n - y^n$.

f) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

g) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, el producto de n números naturales mayores estrictos que uno y no necesariamente consecutivos es mayor estricto que n.

h) $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

i) $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$(1 + \frac{1}{1})^{1+1}(1 + \frac{1}{2})^{1+2}(1 + \frac{1}{3})^{1+3}.........(1 + \frac{1}{n})^{1+n} = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{n!}.$$

P20.- Encuentre el coeficiente de x^4 en el desarrollo de $(1+2x+3x^2)^5$.

P21.- Nos proponemos demostrar que, si tenemos n rectas en el plano, de modo tal que no existen paralelas y además la intersección entre ellas es dos a dos (es decir, no existen tres rectas que se corten en el mismo punto), entonces el total de regiones formadas es $S_n = (\sum_{j=0}^{n} j) + 1$.

a) Mostrar que n puntos sobre una recta generan $n+1$ segmentos (use inducción).

b) Usando (i) encontrar una expresión general para S_n en términos de S_{n-1}. Explique claramente y demuestre por inducción la fórmula deseada para S_n.

P22.- Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ defina $k = 2^n$. Queremos probar que todo subconjunto $Y \subseteq \mathbb{N}$ de $2k-1$ elementos posee un subconjunto $X \subseteq Y$ de k elementos cuya suma es divisible por k.

a) Para $n = 1$ y $k = 2$ pruebe que de todo subconjunto de 3 elementos de $\mathbb{N}$ se pueden extraer 2 números cuya suma es divisible por 2.

b) Probar la propiedad para n cualquiera.

P23.- *a*) Pruebe sin usar inducción que para $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$ y deduzca que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

b) Calcular las sumatorias siguientes.

1) $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} \log(1+\frac{1}{k})$, donde $n \leq m$.

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!\,(n-k)!}$, donde $n \geq 1$.

c) Sea $S = 1+(1+b)q+(1+b+b^2)q^2+.....+(1+b+...+b^n)q^n$, donde $n \in \mathbb{N}$, $q, b \in \mathbb{R}$, $q, b \neq 1$. Escribir S como una expresión de dos sumatorias y calcúlela.

d) (i) Sea $p \in \mathbb{N}$ un número natural fijo. Probar por inducción que $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\frac{p!}{0!} + \frac{(p+1)!}{1!} + \frac{(p+2)!}{2!} + ... + \frac{(p+n-1)!}{(n-1)!} = \frac{1}{(p+1)}\frac{(p+n)!}{(n-1)!}$$

Use la propiedad anterior para deducir las fórmulas para calcular $\sum_{k=1}^{n} k$ y $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
(ii) Calcular para $m \geq 1$,

$$\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1)$$

(iii) Calcular

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$$

P24.- Sea $n \geq 2$. Calcule el valor de la suma siguiente, en función de n:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2$$

Indicación: $k^2 = k + k(k-1)$.

P25.- (i) Se define la función $\varphi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $\varphi_1(x_0, x_1) = x_0 + x_1$. Y para cada número natural $n \geq 2$ se define por recurrencia la función $\varphi_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ como

$$\varphi_n(x_0, ..., x_n) = \varphi_{n-1}(x_0, ..., x_{n-1}) + \varphi_{n-1}(x_1, ..., x_n)$$

en cada $x_0, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Probar usando inducción que

$$\varphi_n(x_0, ..., x_n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_k$$

P26.- Sea $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $T : A \to A$ la función definida por $T(0) = 1$, $T(1) = 2$, $T(2) = 3$ y $T(3) = 0$. Se define el conjunto $I = \{\ h : A \to \mathbb{R} \mid h$ es función y $h(0)+h(1)+h(2)+h(3) = 0\ \}$. Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, definamos otra función $\hat{f} : A \to \mathbb{R}$ tal que a cada $n \in A$ le asocia $\hat{f}(n) = (f \circ T)(n) - f(n)$.

(i) Probar que si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función, entonces $\hat{f} \in I$.

Sea ahora $D = \{f : A \to \mathbb{R}\ /\ f$ es función y $f(0) = 0\}$.
Definamos la función $\Delta : D \to I$ tal que a cada $f \in D$ le asocia $\Delta(f) = \hat{f}$.

(ii) Pruebe que Δ es biyectiva.

P27.- (a) Sea F el conjunto de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\Phi : F \to \mathbb{R}$ que a cada $f \in F$ le asocia $\Phi(f) = f(0)$. Demuestre que Φ es una función sobreyectiva.

(b) Sean $E \neq \emptyset$ y $A \subseteq E$(fijo). Se definen las funciones f y g de $\mathcal{P}(E)$ en $\mathcal{P}(E)$ mediante $f(X) = A \cup X$ y $g(X) = A \cap X$, para todo $X \subseteq E$.

(i) Discuta en función de A la posibilidad de que f o g sean sobreyectivas. Justifique.

(ii) Determinar un conjunto A para el cual f es biyectiva, y otro para el cual g es biyectiva. Justifique.

P28.- Dados $a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, se denota por $a|\, b$ (a **divide a** b) cuando b es divisible por a. Asimismo, decimos que dos números $p, q \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ son **coprimos** si el único número que divide a ambos es el uno.

Definamos $a_n = 2^{2^n} + 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Probaremos que a_n y a_m son coprimos si $n \neq m$. Para ello, argumentaremos por contradicción.

(a) Muestre por inducción que

$$a_0 \cdot a_1 \cdot ... \cdot a_{n-1} + 2 = a_n \quad \text{para } n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$$

(b) Pruebe que si $\exists\, p > 1$ tal que $p|\, a_n$ y $p|\, a_m$ para $m < n$, entonces p es par e impar a la vez. Concluya el resultado pedido.

P29.- Demostrar **sin usar inducción** que $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$.

P30.- (a) Demuestre por inducción que para cada natural $n \geq 3$:

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$$

(b) Suponga que se dispone de una lista infinita de números

$$v_0, v_1, v_2, v_3 \ldots$$

y se sabe que

$$\begin{array}{rrcl} & v_0 & = & 2 \\ & v_1 & = & 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2) & v_{n+1} & = & 3v_n - 2v_{n-1} \end{array}$$

Demuestre que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = 2^n + 1$$

Ind: Considere la proposición abierta:

$$p(n) : \ (v_n = 2^n + 1) \ \wedge \ (v_{n+1} = 2^{n+1} + 1)$$

P31.- (i) Demuestre usando inducción que $\forall n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(ii) Demuestre que para $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2 = 2^{n-2} \cdot n(n+1)$$

Indicación: $k^2 = k + k(k-1)$.

(iii) Sea H_k el k-ésimo número armónico, es decir,

$$H_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$$

Demuestre sin usar inducción que $\forall n \geq 2$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{H_k}{k(k-1)} = 2 - \frac{1}{n} - \frac{H_n}{n}$$