Escuela de Ingeniería - Universidad de Chile
Escuela de Verano 2011
Matemáticas III

Profesor: Pablo Dartnell

Auxiliares: Roberto Castillo y Andrés Zúñiga

Guía de Problemas N° 1 *

P1.- Sean p, q y r proposiciones. Demostrar con y sin tablas de verdad que las siguientes proposiciones son tautologías:

(i) $p \Rightarrow (p \vee q)$

(ii) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

(iii) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

(iv) $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

(v) $\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$

(vi) $[(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r] \Rightarrow \sim p$

(vii) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$

(viii) $[(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

(ix) $(p \wedge q) \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \Leftrightarrow q)]$

(x) $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge \sim r \Rightarrow \sim q)$

P2.- Sean p y q proposiciones. Se define la proposición $p \downarrow q$, por la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

(i) Probar que $\sim p \Leftrightarrow (p \downarrow p)$ y que $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (p \downarrow q)$.

(ii) Expresar las proposiciones $p \Rightarrow q$ y $q \wedge p$ usando sólo $\downarrow$ y $\sim$.

*Esta guía fue extraída del material de apoyo confeccionada por el Departamento de Ingeniería Matemática para el curso de Álgebra dictado en Plan Común.

P3.- Sean p y q proposiciones. Definamos la proposición,

$$(p \vdash q) \;\Leftrightarrow\; (\text{Existe una proposición } r \text{ tal que } (p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)).$$

Pruebe que $p \vdash q \;\Leftrightarrow\; p \Rightarrow q$.

P4.- Sean p, q, r tres proposiciones tales que r es falsa, $(p \Leftrightarrow \sim q)$ es verdadera y $(q \Rightarrow r)$ es verdadera. Deduzca el valor de verdad de p.

P5.- Sean p, q, r proposiciones.

(i) Construya la proposición lógica que es verdadera cuando exactamente una de las proposiciones p, q, r es verdadera. Entregue una forma reducida de la proposición.

(ii) Compare la proposición obtenida en el punto anterior con la proposición $(p \veebar q) \veebar r$, donde

$$p \veebar q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q).$$

P6.- (i) Sean p, q, r proposiciones. Construir la proposición compuesta "s" (en función de p, q, r) cuya tabla de verdad es:

p	q	r	s
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

(ii) Probar que $s \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ es una tautología.

P7.- (a) Sean p, q, r proposiciones. Demuestre la siguiente tautología con y sin tabla de verdad:

$$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$$

(b) Sea $p(x, y)$ una proposición abierta dependiente de x e y. Considere la siguiente proposición lógica:

$$(\exists x)(\forall y)p(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)p(x, y)$$

Justifique la veracidad de ésta. Indique un caso particular de proposición abierta $p(x, y)$ que haga **falsa** la proposición recíproca, es decir:

$$(\forall y)(\exists x)p(x, y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)p(x, y)$$

P8.- Negar las siguientes proposiciones:

(i) $(\exists\ x \in \mathbb{R})(\forall\ y \in \mathbb{R})\ x < y$

(ii) $(\forall\ x \in \mathbb{R})(\forall\ y \in \mathbb{R})\ x \geq y$

(iii) $(\exists\ x \in \mathbb{R})(\forall\ y \in \mathbb{R})\ x > 1\ \wedge\ y \leq 1$

(iv) $(\forall\ \epsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\ n_0 \in \mathbb{N})(\forall\ n > n_0)\ |a_n| < \epsilon$

P9.- (i) Negar la proposición siguiente:

$$(\forall\ x \in \mathbb{Q})(\forall\ \epsilon > 0)(\exists\ y \in \mathbb{Q}^c)\ \epsilon/3 < |x - y| < \epsilon/2.$$

(ii) Indique el valor de verdad de las proposiciones cuantificadas siguientes:

(a) $(\exists\ n \in \mathbb{N})(\forall\ x \in \mathbb{R})(\forall\ m \in \mathbb{N})\ \ n(x^2 - mx) \leq 0.$

(b) $(\forall\ x \in A)(\exists\ \delta > 0)\ \ x^2 > \delta$, donde $A = \{x \in \mathbb{R}\ /\ 0 < x < 10\}$.

P10.- Sean las proposiciones $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ tales que $[(p_1 \veebar p_2) \Rightarrow (p_3 \Rightarrow p_4)]$ es falsa. Determinar el valor de verdad de:

(i) $(p_5 \Rightarrow p_6) \vee (p_1 \vee p_2)$

(ii) $[(p_5 \Rightarrow p_2) \vee \sim p_1] \Rightarrow (p_4 \vee p_3)$

(iii) $\sim [(p_6 \vee p_5) \wedge (p_1 \wedge p_2)] \Leftrightarrow (p_4 \Rightarrow p_3)$

P11.- Sea S un conjunto de números reales. Se dice que x es un punto aislado de S si existe un número real positivo d tal que para todo punto $y \in S$ la distancia entre x e y es mayor o igual que d.

(i) Escribir la definición de punto aislado usando cuantificadores.

(ii) Demostrar que si $x \in S$ entonces x no es punto aislado de S.

(iii) Sea $S = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, ...\}$. Probar que el origen no es un punto aislado de S.

P12.- (a) Si q y r son proposiciones no equivalentes. Determine el valor de verdad de la proposición:

$$[\sim (q \vee r) \wedge (q \wedge r)] \Rightarrow [(p \wedge s) \vee (\sim s \vee q)]$$

(b) Si la proposición $p \Rightarrow q$ es falsa. Cual es el valor de verdad de la proposición $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge q$.

(c) Considere el conjunto $A = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$. Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas (justifique):

$$\begin{array}{ll} (i) & (\forall\ x, y \in A)\ \ (x + y \leq 1) \\ (ii) & (\forall\ x \in A)(\exists\ y \in A)\ \ (x^2 \leq y) \end{array}$$

Escriba la negación de las proposiciones anteriores.

P13.- (i) Sean p, q y r proposiciones tales que $((\sim p \vee q) \;\Rightarrow\; r)$ es falsa. Entregar el valor de verdad de las siguientes proposiciones (justifique su respuesta):

(a) $\sim q \;\Rightarrow \sim p$

(b) $r \;\Rightarrow\; (p \;\Leftrightarrow \sim (q \vee r))$

(ii) Sean p, q y r proposiciones. Probar sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología:

$$((p \;\Rightarrow\; q) \wedge (r \;\Rightarrow\; s)) \;\Rightarrow\; ((p \wedge r) \;\Rightarrow\; (q \wedge s))$$

P14.- (a) Sean p, q, r proposiciones. Determinar si la equivalencia $p \vee (q \wedge r) \;\Leftrightarrow\; (p \vee r) \wedge q$ puede ser verdadera sin que lo sea la implicancia $p \;\Rightarrow\; q$.

(b) Sean p, q, r proposiciones. Probar sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología

$$(p \vee q \;\Leftrightarrow\; p \wedge r) \;\Rightarrow\; ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)).$$

(c) Sean p, q, r proposiciones. Probar sin usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología

$$(p \Rightarrow \sim q) \wedge (r \Rightarrow q) \;\Rightarrow\; (p \Rightarrow \sim r).$$

P15.- Los luctuosos hechos acaecidos en la mansión Ω han conducido a la brigada de homicidios a detener a tres sicarios sospechosos del deleznable crimen. Para no enlodar a las inocentes familias de los susodichos, en lo que sigue nos referiremos a ellos como S_1, S_2 y S_3.
Durante el interrogatorio, las declaraciones de los sospechosos fueron las siguientes:

S_1 : "S_2 es culpable y S_3 es inocente."

S_2 : "Si S_1 es culpable, entonces S_3 también es culpable."

S_3 : "Yo soy inocente, pero alguno de los otros dos es culpable."

Suponiendo que los inocentes dijeron la verdad y los culpables mintieron, determine quienes son los culpables. (Justifique matemáticamente su respuesta).

P16.- Se define el conectivo $*$ de la siguiente manera:

$p * q$ es verdadera si y sólo si ambas p y q son falsas

(a) Pruebe usando tablas de verdad que:

$$p * q \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \wedge \;\sim (p \wedge q)]$$

(b) Demuestre **sin** tablas de verdad que las siguientes son tautologías:
i) $\sim p \Leftrightarrow p * p$
ii) $p \vee q \;\Leftrightarrow (p * q) * (p * q)$

P17.- Se tiene un mazo de naipes, los cuales por una cara tienen letras, y por la otra cara, números. Se hace la siguiente afirmación:

P: "Si un naipe tiene un dos por un lado, entonces tiene una B por el otro"

Se colocan cuatro de estos naipes sobre la mesa, de los cuales se ve un sólo lado:

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$

¿Qué naipe(s) hay que dar vuelta y cuál(es) no es(son) necesario(s) dar vuelta para determinar si P es $Verdadera$ para estos 4 naipes? Fundamente matemáticamenente su respuesta.

P18.- (i) Sean p, q y r proposiciones lógicas. Demuestre **sin** usar tabla de verdad que la siguiente proposición es una tautología:

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$$

(ii) Muestre que la siguiente proposición es verdadera

$$(\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x) \Rightarrow (\forall x)(p(x) \vee q(x))$$

para $p(x)$ y $q(x)$ proposiciones abiertas cualquiera.
Además, dé un caso donde

$$(\forall x)(p(x) \vee q(x)) \Rightarrow (\forall x)p(x) \vee (\forall x)q(x)$$

es **falsa**.

P19.- Una mamá le dice a su querido hijo: "Si te portas bien, te regalo un dulce, **o bien**, si no te portas bien, te regalo un dulce".

Suponiendo que la mamá le dijo la verdad a su hijo, ¿se puede saber si el hijo recibirá el dulce o no? Justifique. Se espera que resuelva este problema en las dos situaciones distintas siguientes:

a) El "o bien" de la frase de la mamá es el "o" usual "$\vee$".

b) El "o bien" es el "o" exclusivo "$\veebar$".

P20.- (i) Sean p, q, r proposiciones lógicas. Demuestre **sin** usar tablas de verdad que la siguiente proposición es una tautología:

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [\sim (q \wedge r) \Rightarrow \sim (p \wedge r)]$$

(ii) Sean p, q proposiciones abiertas. Se definen las proposiciones lógicas r y s por:

$$\begin{aligned} r &: \ (\forall x)(\exists y)(p(x,y) \Rightarrow q(y)) \\ s &: \ ((\forall x)(\forall y)p(x,y)) \Rightarrow ((\exists y)q(y)) \end{aligned}$$

Escriba la negación de la proposición r y de la proposición s.
Observación: Dé su respuesta final de la forma más simplicada posible, esto es, que su expresión final sólo quede en función de los conectivos $\wedge$, $\vee$ y negaciones. (*No* deben aparecer los conectivos $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ni $\veebar$).

P21.- Usted es nombrado repartidor de bienes de un testamento pero hay confusión acerca de donde se encuentran las cosas que deben ser repartidas. Los bienes son: un piano, un auto y un retrato.
Las declariciones de los 3 herederos son:

Andrés: Carlos tiene el piano, Bonifacio el auto pero yo tengo el retrato.

Bonifacio: Si Andrés tiene el retrato, Carlos tiene el piano.

Carlos: Yo no recuerdo bien, pero estoy seguro de que, o Bonifacio tiene el auto y yo el piano, o Andrés tiene el retrato y yo el piano, o Andrés tenía el retrato y Bonifacio el auto.

(i) Si Carlos no miente y además usted cree que los otros sí lo hacen ¿qué se puede decir de quién tiene los objetos?

(ii) Si usted sabe que sólo uno miente ¿quién se queda con el piano? ¿Quién miente?

P22.- Sean A, B, C conjuntos. Emplear los teoremas del álgebra de conjuntos para probar que:

(i) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$

(ii) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$

(iii) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$

(iv) $A \subseteq B \subseteq C \;\Rightarrow\; C \setminus (B \setminus A) = A \cup (C \setminus B)$

(v) $B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \;\Leftrightarrow\; A = \emptyset$

(vi) $(A \cap B \cap C = \emptyset) \;\Rightarrow\; [(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = A \cup B \cup C]$

(vii) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

(viii) $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus (A^c \cup C)$

(ix) $[A \setminus (B \setminus A)] \cup [(B \setminus A) \setminus A] = A \cup B$

(x) $(A \cup B = A \cap C) \Rightarrow (B \subseteq A \wedge A \subseteq C)$

(xi) $(A \cap C = \emptyset) \Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

(xii) $A \Delta B = C \Rightarrow A \Delta C = B$

(xiii) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = (A \Delta B) \cup (B \Delta C) \cup (A \Delta C)$

P23.- Sea A un subconjunto fijo del conjunto U. Probar que para todo par de subconjuntos X, Y de U se tiene

$$X = Y \;\Leftrightarrow [\; X \cup A = Y \cup A \;\wedge\; X \cap A = Y \cap A] \,.$$

P24.- Sea B un subconjunto del conjunto U. Pruebe que,

$$[(\forall\ A \subseteq U)(A \cup B = A)]\ \Rightarrow B = \emptyset.$$

P25.- Sean A, B en el universo U. Demuestre que:

(i) $A \cup B \subset A \cap B \Rightarrow A = B$.

(ii) $A \subset A^c \Leftrightarrow A = \emptyset$.

P26.- Sean $A \subset U$ dos conjuntos. Encuentre y justifique todas las relaciones de inclusión que puedan existir entre los siguientes conjuntos:

(i) $\mathcal{P}(A \cup B)$ y $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

(ii) $\mathcal{P}(A \cap B)$ y $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

(iii) $\mathcal{P}(U \setminus A)$ y $\mathcal{P}(U) \setminus \mathcal{P}(A)$

P27.- Dar los elementos del conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

P28.- Sean A, B, C conjuntos.

(i) Probar que $C \subseteq A \cup B \Leftrightarrow (A \setminus B) \cap C = C \setminus B$.

(ii) Probar que $A \subseteq C\ \Rightarrow\ A \setminus B = C \setminus [B \cup (C \setminus A)]$.

(iii) Suponga que las siguientes proposiciones son verdaderas:

$$(x \in A\ \wedge\ y \in B) \Rightarrow y \in A$$
$$(x \notin A\ \vee\ y \in A) \Rightarrow y \notin B.$$

Probar que $y \notin B$ es verdadera.

P29.- Sea A un subconjunto fijo del conjunto E y sea $M = \{X \in \mathcal{P}(E)\ /\ A \cap X = \emptyset\}$. Probar que:

(i) $\emptyset \in M$ y $E \setminus A \in M$.

(ii) $A \in M \Leftrightarrow A = \emptyset \Leftrightarrow M = \mathcal{P}(E)$.

(iii) $(\forall\ X \in M)(\forall\ Y \in \mathcal{P}(E))\ X \cap Y \in M$.

(iv) $[(X \in M) \wedge (Y \in M)] \Rightarrow [(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)] \in M$.

P30.- Sea $\spadesuit$ la operación entre conjuntos definida por $A\spadesuit B = A^c \cap B^c$. Considere un universo U y $\mathbb{F} \subset \mathbb{P}(U)$ una colección no vacía de conjuntos tal que $\forall A,\ B \in \mathbb{F},\ A\spadesuit B \in \mathbb{F}$. Si $A,\ B \in \mathbb{F}$ demuestre que:

(i) $A^c \in \mathbb{F}$

(ii) $A \cap B \in \mathbb{F}$

(iii) $A \cup B \in \mathbb{F}$

(iv) $\emptyset \in \mathbb{F} \wedge U \in \mathbb{F}$

P31.- Un conjunto $M \subseteq \mathcal{P}(E)$ se llama *Álgebra* de las partes de E si verifica las siguientes propiedades:

(i) $E \in M$

(ii) $(\forall\ A, B \in M)\ A \cup B \in M$

(iii) $(\forall\ A \in M)\ A^c \in M$

Se pide:

(a) Demostrar que $\emptyset \in M$

(b) Demostrar que $(\forall\ A, B \in M)\ A \cap B \in M$

(c) Demostrar que $(\forall\ A, B \in M)\ A \Delta B \in M$

(d) Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$, determinar si

$$M = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$$

es un *Álgebra*. Si no lo es, agregar el menor número de conjuntos para que lo sea.

P32.- Sean $A, B \subseteq E$ y $C, D \subseteq F$. Demuestre que:

a) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$

b) $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$
Dé un ejemplo que muestre que la otra inclusión no es siempre verdadera.

c) $(E \times F) \backslash (A \times C) = ((E \backslash A) \times F) \cup (E \times (F \backslash C))$

P33.- (i) Sean A, B, C, X subconjuntos de U (conjunto universo), tales que cumplen:

$$A \cup X = B$$

$$A \cap X = C.$$

Encuentre X en términos de A, B y C.

(ii) Sean A, B y C subconjuntos de U (conjunto universo), Pruebe que:

$$A \Delta [(B \backslash C) \cup (C \backslash A)] = C \cup (A \Delta B)$$

P34.- Sean A, B, C subconjuntos de U (conjunto universo). Demuestre que:

(i) $A \Delta A = \varnothing$

(ii) $A \Delta \varnothing = A$

(iii) Utilizando lo anterior, demuestre que:

$$A \Delta B = C \Rightarrow A \Delta C = B$$

Indicación: Recuerde que Δ cumple las propiedades de conmutatividad y asociatividad.

P35.- $a)$ Probar que $\forall A, X \subseteq U$ se cumple:

$$[(A \cup X) \setminus (A \Delta X)] \cup [(A \cup X) \setminus A] = X$$

$b)$ Dados A, B, C conjuntos, aprovechar el resultado entregado en (a) para determinar un conjunto X tal que $(A \Delta X = B)$ y $(A \cup X = C)$.

$c)$ Probar que en el caso $B = C$, el conjunto X es disjunto con A.