Escuela de Ingeniería - Universidad de Chile
Escuela de Verano 2011
Matemáticas III

Profesor: Pablo Dartnell

Auxiliares: Roberto Castillo y Andrés Zúñiga

Guía de Problemas N° 4 *

Derivadas y Aplicaciones

P1.- Usando sólo de la definición de derivada, hallar las derivadas de las siguientes funciones.

i) $y = \sqrt{x}$ ii) $y = \frac{1}{x}$ iii) $y = sen^2(x)$ iv) $y = x^4 + 3x^2 - 6$ v) $y = 5(x+a)^3,\ a \in \mathbb{R}$

P2.- Utilizando las reglas de derivación calcule las derivadas de las siguientes funciones.

i) $y = \frac{2x^4}{b^2 - x^2}$ ii) $y = \frac{x^p}{x^m - a^m}$ iii) $y = (a+x)\sqrt{a-x}$ iv) $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

v) $y = \frac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$ vi) $y = \ln(\ln x)$ vii) $y = (1 + \sqrt{x}\,)^3$

viii) $y = \ln^3 x$ ix) $y = (\ln(x))^{\ln(x)}$

P3.- Calcular las derivadas de las siguientes funciones hallando previamente sus logaritmos.

i) $y = x^5(a+3x)^3(a-2x)^2$ ii) $y = arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$ iii) $y = arcsen\left(\sqrt{senx}\right)$

iv) $y = arctg(\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}), (0 \leq x < \pi)$ v) $y = arctg\frac{a}{x} + ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$ vi) $y = arcsen(senx)$

P4.- Un cuerpo lanzado al vacío, formando con la horizontal un ángulo α, describe una trayectoria parabólica por acción de la gravedad cuyas ecuaciones son $x = v_0 cos(\alpha t), y = v_0 sen(\alpha t) - \frac{gt^2}{2}$, determinar la dirección del movimiento para los 5 primeros segundos, siendo $\alpha = 60^o, v_0 = 50\frac{m}{s}$, y bosqueje.

P5.- De las fórmulas para calcular el volumen y la superficie de la esfera $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3, S(r) = 4\pi r^2$, se deduce que $V'(r) = S(r)$. Explicar el significado geométrico de este resultado. Hallar la relación análoga entre el área del círculo y la longitud de la circunferencia.

P6.- En el triángulo ABC se cumple: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\,cosA}$. Sean b, c constantes, demostrar que $\frac{da}{dA} = h_a$, en que h_a es la altura del triángulo correspondiente a la base a. Interpretar el significado geométrico de este resultado.

P7.- Para cada una de las siguientes funciones, hallar máximos y mínimos.

a) (i) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, sobre $[-1, \frac{1}{2}]$ (ii) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-2}$ sobre $[0, 4]$.

*Esta guía fue extraída del material de apoyo confeccionada por el Departamento de Ingeniería Matemática para el curso de Cálculo dictado en Plan Común.

b) (i) $f(x) = e^{-x}(1-x^2)$ sobre $[-1,2]$ (ii) $f(x) = cos(x^2) - sen(x)$, sobre $[-\pi, \pi^2]$.

P8.- Pruebe que las funciones $x^2 - cos(x)$ y $2x^2 - xsen(x) - cos^2(x)$ tienen exactamente dos ceros.

P9.- Considere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xln(x)}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \alpha & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

a) Determine el valor de α para que f sea continua en $\mathbb{R}_+^*$.

b) Analice la existencia de $f'(x)$ para $x > 0$. En caso de existir, calcúlela.

c) Determine los puntos de continuidad de f' en $]0, \infty[$.

P10.- Analice completamente $f(x) = e^{\frac{1}{ln(x)}}$ (dominio, asíntotas de todo tipo, derivada, crecimiento, gráfica)

P11.- Sean $0 < a < b$. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$, con $f(a) = f(b) = 0$ y $f'(a) = 0$. Demuestre que existe $c \in]a,b[$ de modo que la tangente a f en el punto c pasa por el origen. Analice que pasa si $a = 0$.

P12.- Sea $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$.

a) Determine los valores de x para los cuales $f(x)$ existe y calcule su valor.

b) Estudie la continuidad y la diferenciabilidad de f, en los puntos donde $f(x)$ existe.

P13.- Considere la función f dada por la asignación $f(x) = \sqrt{1 - x^2 \frac{arctg(x)}{x}}$ definida sobre $[-1,1] \setminus \{0\}$. Defina f en 0 de modo que resulte continua en dicho punto.

P14.- Sea f continua en $[0, +\infty[$, derivable en $A =]0, +\infty[$ y tal que $f(0) = 0$ y $f'(x)$ es creciente en A. Utilice el Teorema del Valor Medio para probar que $\forall x \in A$, $f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}$. Concluya que la función $\frac{f(x)}{x}$ es creciente en A.

P15.- *a*) Para la función $\frac{x^3}{1-x^2}(e^x - e)$ encuentre: dominio, ceros, así ntotas de todo tipo y límites en 1 y -1.

b) Para la función $cos(x)e^{-\frac{cos(x)}{2}}$ encuentre mí nimos y máximos.

P16.- Sea f definida y continua sobre $[a,b]$ y derivable sobre $]a,b[$, con $0 < a < b$. Suponga que $f(a) = f(b) = 0$. Mostrar que existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$.

P17.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

a) Encontrar los ceros, mínimos, máximos, puntos críticos y puntos de inflexión de f.

b) Estudiar las asíntotas y bosquejar el gráfico de f.

P18.- Estudiar completamente la función $f(x) = \frac{x}{ln^2(x)}$ indicando: dominio, recorrido, continuidad y eventuales reparaciones de discontinuidades, diferenciabilidad, paridad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mí nimos, concavidad, puntos de inflexión, así ntotas y gráfico.

P19.- Dada la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{x})$ Se pide estudiarla completamente indicando:dominio, recorrido, continuidad y eventuales reparaciones de discontinuidades, diferenciabilidad, paridad, crecimiento, puntos crí ticos, máximos y mí nimos, concavidad, puntos de inflexión, así ntotas y gráfico.

P20.- Dado $a > 0$, verificar que la función de variable real

$$f(x) = (a - \frac{1}{a} - x)(4 - 3x^2)$$

tiene exactamente un sólo máximo local y un sólo mí nimo local y que la diferencia entre los valores alcanzados es

$$\frac{4}{9}(a + \frac{1}{a})^3$$

Cuál es el menor valor de esta diferencia para diferentes valores de a?.

P21.- Sean a, b números reales tales que $a < b$ y f una función real y continua en $[a, b]$. Suponga que f no se anula en el intervalo $[a, b]$ y que es diferenciable en $]a, b[$. Demostrar que existe $c \in]a, b[$ tal que :$\frac{f(a)}{f(b)} = \frac{f'(c)}{f(c)} \cdot e^{(a-b)}$. Indicación, considere la función $g = ln|f|$, comente las propiedades de g en $[a, b]$.

P22.- Considere la función $f(x)$ definada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{tg(\pi x)}{x(x-1)} & \text{si } x \neq 0, 1, \frac{1}{2} \\ a & \text{si } x = 0 \\ b & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Determine los valores de a y de b de modo que f sea continua en 0 y en 1. ¿Es posible definir f en $\frac{1}{2}$ para que sea continua en $[0, 1]$?.

P23.- Sea $[a, b]$, $a < b$ y $f(x)$ una función definida en $[a, b]$, positiva y continuamente derivable (derivable con derivada continua) en (a, b). Se definen las funciones $g(x)$ y $h(x)$ de la siguiente forma

$$g(x) = (x - a)(x - b)f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

y

$$h(x) = g'(x) + cg(x) \quad \text{para algún } c \in \mathbb{R}$$

Probar que h tiene al menos una raíz en (a, b).

P24.- Estudie el gráfico de la función $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, determinando: dominio, recorrido, continuidad y eventuales reparaciones de discontinuidades, diferenciabilidad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos, asíntotas y gráfico.

P25.- Considere la función $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Demuestre que f verifica $(1 - t^2)f'(t) - tf(t) = 0$. Luego, demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f^{(n)}(t) = P_n(t)(1 - t^2)^{-n-\frac{1}{2}}$. Donde P_n es algún polinomio de grado n.
Indicación: Proceda por inducción.

P26.- Sea f tal que $f'(x) \geq M > 0$ para todos los valores en $[0,1]$. Demostrar que existe un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$ en el que $|f| \geq \frac{M}{4}$.

P27.- Encuentre una función f para la cual existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, pero no existe $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$.

P28.- *a*) Se dice que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada sobre $[a,b]$ si existe una constante $k \geq 0$ tal que : $\sum\limits_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq k$. Cualquiera sea el conjunto de puntos t_i tales que : $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b$. Demuestre que si f es derivable en $[a,b]$ y f' es acotada en $]a,b[$ entonces f es de variación acotada en $[a,b]$. Ind. Utilice el teorema del valor medio.

b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciable en $[a,b]$ y tal que $f(a) = f(b) = 0$, con $0 < a < b$. Demuestre que existe $c \in]a,b[$ tal que: $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$. Ind. Utilice la función auxiliar $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.

P29.- Sea la función $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$.
Detemine dominio, signos (es decir, dónde f es positiva, dónde f es negativa y dónde f es cero), asíntotas verticales, oblicuas, horizontales, máximos, mínimos, crecimiento, puntos de inflexión y concavidades .
Bosqueje el gráfico de la función.
Indicación: Para el bosquejo de su gráfico pueden servirle las siguientes aproximaciones:
$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,62; \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62.$$
Recuerde también que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

P30.- (a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función.
Se dice que f es par si $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(-x) = f(x)$.
Se dice que f es impar si $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(-x) = -f(x)$.
Demuestre que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par y derivable, entonces g' es una función impar.

(b) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable, con $h(0) = h'(0) = 0$. Dado $a > 0$, demuestre que existe $\xi \in (0,a)$ tal que
$$h(a) = \frac{a^2}{2} h''(\xi)$$
Indicación: Defina la función $r(x) = h(x) - \left(\frac{x}{a}\right)^2 h(a)$, y calcule $r''(x)$.

P31.- (a) Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en 0 y satisface:
$$(R1) \qquad g(x+y) = g(x) + g(y)$$
Pruebe que g es continua en todo $\mathbb{R}$.
Indicación: Pruebe primero que $g(0) = 0$.

(b) Sea ahora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función no idénticamente nula tal que satisface:

$$\begin{array}{ll} (S1) & f(x+y) = f(x) + f(y) \\ (S2) & f(xy) = f(x)f(y) \end{array}$$

(i) Pruebe que $f(0) = 0$ y que $f(1) = 1$.

(ii) Pruebe por inducción que $(\forall n \in \mathbb{N}) f(n) = n$. Concluya de lo anterior que $(\forall p \in \mathbb{Z}) f(p) = p$.
Observación: Note que de lo anterior se deduce que $(\forall r \in \mathbb{Q}) f(r) = r$. Esto puede usarlo en el resto de la pregunta *sin* tener que demostrarlo.

(iii) Pruebe que $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$, Deducir que f es creciente.
Indicación: Recuerde que si $x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{x}\sqrt{x}$.

(iv) Pruebe que $f(x) = \sup\{f(r) : r \leq x \wedge r \in \mathbb{Q}\}$. Concluya que $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = x$.

P32.- Sea $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sqrt{x}$

(a) Calcule la derivada de f por definición.

(b) ¿En qué puntos del dominio f es derivable?

(c) Estudiar crecimiento y existencia de asíntotas.

P33.- (a) Sea $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ una función derivable en todo su dominio, y que satisface

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in]0, \infty[$$

demuestre que f es constante .
(*Ind*: use el teorema del valor medio).

(b) Si f es una función derivable en x, muestre que:

$$\big(x \cdot f(x)\big)' = f(x) + \ x \cdot f'(x)$$

(c) Sea $f :]0, \infty] \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo su dominio, y que satisface

$$\forall x > 0 \quad x \cdot f'(x) = -f(x)$$

demuestre que existe una constante K tal que

$$\forall x > 0 \qquad f(x) = \frac{K}{x}$$

P34.- Sea la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4|x|}$$

(a) Determine domino, ceros y signos.

(b) Determine asíntotas de todo tipo.

(c) Analice donde es derivable la función, y calcule f' donde exista.

(d) Estudie crecimiento, máximos, mínimos de la función.

(d) Bosqueje un gráfico de la función.

P35.- (i) Muestre que

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

Indicación: Recuerde que $1+x \leq e^x$ $\forall x \geq 0$, y tome $x = -\ln(\sqrt{x_n})$.

(ii) Demuestre que

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)} = 1$$

Indicación: Utilice la propiedad de que si $x > 0$, $x^{\operatorname{sen}(x)} = e^{\operatorname{sen}(x)\ln(x)}$

(iii) Calcule la derivada de $x^{\operatorname{sen}(x)}$, con $x > 0$, y demuestre que

$$\lim_{x\to 0^+} (x^{\operatorname{sen}(x)})' = -\infty$$

P36.- (a) [*TVM Generalizado*] Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$, derivables en (a, b). Considere la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

(i) Muestre que F es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

(ii) Muestre que $F(a) = F(b)$

(iii) Aplique el Teorema del Valor Medio (o el Teorema de Rolle) a la función F y concluya que existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$(g(b) - g(a))f'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi).$$

(b) [*Regla de L'Hôpital*] Sean $\bar{x}, L \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Considere $f, g : (\bar{x} - r, \bar{x} + r) \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en todo $(\bar{x} - r, \bar{x} + r)$ tales que $f(\bar{x}) = g(\bar{x}) = 0$, $g(x) \neq 0$ para todo $x \in (\bar{x} - r, \bar{x} + r) \setminus \{\bar{x}\}$ y que el límite $\lim_{x\to\bar{x}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe y es igual a L.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera tal que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}$ con $x_n \neq \bar{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(i) Utilice el resultado de la parte (iii) de (a) para concluir que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe ξ_n que se encunetra estrictamente entre $\bar{x}$ y x_n tal que.

$$g(x_n) \cdot f'(\xi_n) = f(x_n) \cdot g'(\xi_n).$$

(ii) Use que cada ξ_n está estrictamente entre x_n y $\bar{x}$ para mostrar que $\xi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x}$

Indicación: Observe que para cada $n \in \mathbb{N}$ $|\xi_n - \bar{x}| < |x_n - \bar{x}|$.

(iii) Deduzca que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L.$$

(iv) Concluya que

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

P37.- (a) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable en (a,b), con $f(a) = f(b)$. Demuestre que $\exists x_0 \in (a,b)$ tal que

$$f'(x_0) = (2x_0 - a - b)e^{f(x_0)}$$

Indicación: Defina $g(x) = (x-a)(x-b) + e^{-f(x)}$

(b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable en (a,b), y sea $x_0 \in (a,b)$ tal que $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ existe.

Se pide demostrar que f' en continua en x_0, y para esto debe seguir los siguentes pasos:

(i) Sea $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, con $x_n \in (a,b)$, $x_n \neq x_0$. Demuestre que existe una sucesión $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(\xi_n), \text{ con } \min\{x_0, x_n\} < \xi_n < \max\{x_0, x_n\}.$$

(ii) Demuestre ahora que

$$\lim_{n\to\infty} f'(\xi_n) = \lim_{x\to x_0} f'(x)$$

(iii) Concluya que f' es continua en x_0.