Importante: Visita regularmente `http://www.dim.uchile.cl/~algebra`. Ahí encontrarás las guías de ejercicios y problemas, además de información acerca de cuál será la dinámica del curso.

SEMANA 6: PRINCIPIO DE INDUCCIÓN Y SUMATORIAS

Usa estas notas al margen para consultar de manera más rápida el material. Haz también tus propias anotaciones. ▼

5. Principio de inducción

5.1. Principio de inducción: Primera forma

Una categoría importante de proposiciones y teoremas es la de las propiedades de los números naturales. Aquí tenemos, por ejemplo

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ n < 2^n$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (n \text{ es primo} \wedge n \neq 2) \Rightarrow n \text{ es impar}$$

$$(\forall n \geq 1)\ 3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ es divisible por } 7$$

En general, si $p(n)$ es una proposición cuya variable libre n pertenece a $\mathbb{N}$, las distintas formas del **principio de inducción** nos proporcionan proposiciones equivalentes a la proposición

$$(\forall n \geq n_0)\ p(n)$$

Estas formas alternativas nos facilitarán en muchos casos obtener una demostración de la propiedad buscada.

Definición 5.1 (Principio de inducción, primera forma). *Consideremos la proposición*

$$(\forall n \geq n_0)\ p(n)$$

donde $n_0 \in \mathbb{N}$ es un número natural fijo.
La primera forma del principio de inducción nos dice que esta proposición es equivalente a

$$p(n_0) \wedge [(\forall n \geq n_0)\ p(n) \Rightarrow p(n+1)]$$

Observemos los siguientes ejemplos:

Proposición 5.1. *Demostrar que*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ es divisible por } 7$$

Demostración. El caso base es $n = 0$. Aquí, tenemos que demostrar que

$$3^{2\cdot 0+1} + 2^{0+2} \text{ es divisible por } 7$$

Pero esto es verdadero, pues $3^{2\cdot 0+1} + 2^{0+2} = 3 + 4 = 7$.
Supongamos ahora que tenemos un $n \in \mathbb{N}$ tal que se cumple la propiedad, es decir que $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7. Con esta información, a la cual llamamos **hipótesis inductiva**, tenemos que demostrar que $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ es también divisible por 7.

Departamento de Ingeniería Matemática - Universidad de Chile

Gracias a la hipótesis inductiva, tenemos que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$. Entonces:

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} &= 3^{2n+3} + 2^{n+3} \\ &= 9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2} \\ &= (7 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 3^{2n+1}) + 2 \cdot 2^{n+2} \end{aligned}$$

donde esta descomposición la hacemos de modo de poder factorizar el término $3^{2n+1} + 2^{n+2}$. Así, continuamos desarrollando

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} &= 7 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot (3^{2n+1} + 2^{n+2}) \\ &= 7 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 7k \\ &= 7 \cdot \underbrace{(3^{2n+1} + 2k)}_{\in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

por lo que concluimos que $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ es divisible por 7. Gracias al principio de inducción, la propiedad en cuestión es cierta.

Proposición 5.2. *Demostrar que*

$$(\forall n \geq 1)\ 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración. El caso base a demostrar en esta ocasión es $n = 1$. Aquí, tenemos que demostrar que

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

lo que es cierto.
Supongamos ahora que la propiedad vale para algún $n \geq 1$ (hipótesis inductiva). Debemos demostrar que la propiedad también es cierta para $n+1$. Es decir, que

$$1 + 2 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + (n+1) &= 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

y se concluye la veracidad de la propiedad gracias al principio de inducción.

Departamento de Ingeniería Matemática - Universidad de Chile

5.2. Principio de inducción: Segunda forma

La segunda forma del principio de inducción nos dice:

Definición 5.2 (Principio de inducción, segunda forma). *La proposición*

$$(\forall n \geq n_0)\ p(n)$$

es equivalente a

$$p(n_0) \wedge \Big[(\forall n > n_0)\ [p(n_0) \wedge \ldots \wedge p(n-1) \Rightarrow p(n)]\Big]$$

Como ejemplo de la aplicación de esta forma del principio de inducción,
recordemos que los números compuestos son los números naturales mayores que 1 que poseen un divisor distinto de 1 y de sí mismos, es decir, si $n \geq 2$:

$$n \text{ es compuesto} \iff (\exists d \in \{2, \ldots, n-1\})\ d \mid n$$

Recordemos también que los números primos son los que no son compuestos.

Ejemplo:

Proposición 5.3. *Todo número natural $n \geq 2$ posee al menos un divisor que es un número primo. Es decir,*

$$(\forall n \geq 2)(\exists p \text{ número primo})\ p \mid n$$

DEMOSTRACIÓN. Utilizaremos segunda forma de inducción. El caso base es $n = 2$, para el cual observamos que $p = 2$ es un número primo tal que $p \mid n$.

Hagamos ahora el paso inductivo: Sea $n > 2$, y supongamos que para todo valor $k = 2, 3, \ldots, n-1$ se tiene que k posee un divisor primo. Separamos por casos:

- Si n es primo, entonces $p = n$ es un número primo tal que $p \mid n$.
- Si n no es primo, entonces existe un natural $d \in \{2, \ldots, n-1\}$ tal que $d \mid n$. Por hipótesis inductiva y notando que $d < n$, entonces existe un número primo p tal que $p \mid d$.

  Tenemos entonces que $p \mid d$ y $d \mid n$, y gracias a que $\mid$ es una relación transitiva, obtenemos que $p \mid n$.

Definición 5.3 (Fórmulas de recurrencia). *Consideremos el siguiente set de igualdades, al cual llamaremos* **recurrencia***:*

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_{n+1} &= f(x_0, \ldots, x_n) \quad (\forall n \geq 0) \end{aligned}$$

Departamento de Ingeniería Matemática - Universidad de Chile

Las recurrencias nos permitirán una forma alternativa de definir secuencias de números, como por ejemplo

$$x_0 = 2$$
$$x_{n+1} = 2 + x_n \quad (\forall n \geq 0)$$

define la secuencia $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ de números pares positivos.
Una cualidad importante de las fórmulas de recurrencia es que son altamente compatibles con las demostraciones que utilizan principio de inducción. Por ejemplo, consideremos la fórmula de recurrencia

$$x_0 = 1$$
$$x_{n+1} = 1 + \left(\frac{x_n}{2}\right)^2 \quad (\forall n \geq 0)$$

Demostraremos que $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \leq 2$.

Demostración. Lo haremos utilizando primera forma de inducción. El caso base resulta ser cierto pues corresponde a demostrar que $x_0 \leq 2$ (recordemos que $x_0 = 1$).
Supongamos ahora que para algún $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n \leq 2$. Se tiene, entonces, que

$$x_{n+1} = 1 + \left(\frac{x_n}{2}\right)^2 = 1 + \frac{x_n^2}{4} \leq 1 + \frac{2^2}{4} = 2$$

con lo que $x_{n+1} \leq 2$, y se concluye la demostración.

Consideremos la secuencia de números definida por la recurrencia

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

la cual se llama secuencia de **números de Fibonacci**. Sus primeros términos son

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 1 \\ f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 &= 2 \\ f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 &= 3 \\ f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 &= 5 \\ f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 &= 8 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observación: Los números de Fibonacci están relacionados con muchos elementos de la naturaleza. Visita `http://es.wikipedia.org/wiki/Sucesi%C3%B3n_de_Fibonacci`, para más detalles.

Departamento de Ingeniería Matemática - Universidad de Chile

Ejemplo: Números de Fibonacci

Entre muchas propiedades que cumplen, demostraremos la siguiente:

Proposición 5.4.

$$(\forall n \geq 1) \; f_{4n} \textit{ es divisible por } 3$$

Demostración. La demostraremos usando primera forma de inducción. El caso base es $n = 1$, en el cual tenemos que probar que f_4 es divisible por 3. Esto es directo, pues como ya vimos, $f_4 = 3$.
Para el paso inductivo, supongamos que f_{4n} es divisible por 3 para algún $n \geq 1$. Existe, entonces, un $k \in \mathbb{N}$ tal que $f_{4n} = 3k$. Debemos demostrar que

$$f_{4(n+1)} \text{ es divisible por } 3$$

Desarrollemos este término, utilizando la fórmula de recurrencia que cumplen los números de Fibonacci:

$$\begin{aligned}
f_{4(n+1)} &= f_{4n+4} \\
&= f_{4n+3} + f_{4n+2} \\
&= (f_{4n+2} + f_{4n+1}) + (f_{4n+1} + f_{4n}) \\
&= f_{4n+2} + 2f_{4n+1} + f_{4n} \\
&= (f_{4n+1} + f_{4n}) + 2f_{4n+1} + f_{4n} \\
&= 3f_{4n+1} + 2f_{4n} \\
&= 3f_{4n+1} + 2 \cdot 3k \\
&= 3(f_{4n+1} + 2k)
\end{aligned}$$

con lo que $f_{4(n+1}$ también es divisible por 3, que era lo que deseábamos.

6. Sumatorias

6.1. Introducción

Sea $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ una secuencia de números reales. En esta sección estudiaremos propiedades y métodos de cálculo para su suma

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Introduciremos para este efecto una notación especial:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Al símbolo $\sum$ le llamaremos **sumatoria**.
Más generalmente:

Departamento de Ingeniería Matemática - Universidad de Chile

Definición 6.1 (Sumatoria). *Si $a_M, a_{M+1}, \ldots, a_N$ es una secuencia de números reales, definimos su sumatoria por recurrencia:*

$$\begin{aligned}\sum_{k=M}^{M} a_k &= a_M \\ \sum_{k=M}^{n} a_k &= a_n + \sum_{k=M}^{n-1} a_k \quad (\forall n = M+1, \ldots, N)\end{aligned}$$

En este capítulo estudiaremos propiedades y métodos de cálculo para sumatorias de diversos tipos.
La sumatoria cumple la siguiente lista de propiedades:

Proposición 6.1. *1. Suma de la secuencia constante igual a 1.*

$$\sum_{k=I}^{J} 1 = (J - I + 1)$$

2. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, y sean $(a_k)_{k=1}^n$, $(b_k)_{k=1}^n$ dos secuencias.

2.1 *Factorización de constantes.*

$$\sum_{k=I}^{J} \lambda \cdot a_k = \lambda \cdot \sum_{k=I}^{J} a_k$$

2.2 *Separación de una suma.*

$$\sum_{k=I}^{J} (a_k + b_k) = \sum_{k=I}^{J} a_k + \sum_{k=I}^{J} b_k$$

3. Traslación del índice, si $s \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=I}^{J} a_k = \sum_{k=I+s}^{J+s} a_{k-s}$$

4. Separación en dos sumas, si $I \le L < J$.

$$\sum_{k=I}^{J} a_k = \sum_{k=I}^{L} a_k + \sum_{k=L+1}^{J} a_k$$

5. Propiedad telescópica.

$$\sum_{k=I}^{J} (a_k - a_{k+1}) = a_I - a_{J+1}$$

Departamento de Ingeniería Matemática - Universidad de Chile

Demostración. Demostraremos (1) y (6).
Para (1): Lo haremos por inducción sobre $J \geq I$.
Caso base $J = I$: debemos demostrar que

$$\sum_{k=I}^{I} 1 = (I - I + 1)$$

lo cual es directo, pues ambos lados valen 1.
Supongamos ahora que $\sum_{k=I}^{J} 1 = (J - I + 1)$. Entonces

$$\sum_{k=I}^{J+1} 1 = 1 + \sum_{k=I}^{J} 1 = 1 + (J - I + 1) = (J + 1) - I + 1$$

Para (6): Nuevamente por inducción sobre $J \geq I$.
Si $J = I$, el resultado se reduce a demostrar que

$$\sum_{k=I}^{I} (a_k - a_{k+1}) = a_I - a_{I+1}$$

lo cual es directo gracias a la definición de sumatoria.
Supongamos ahora que $\sum_{k=I}^{J} (a_k - a_{k+1}) = a_I - a_{J+1}$. Entonces

$$\sum_{k=I}^{J+1} (a_k - a_{k+1}) = (a_{J+1} - a_{J+2}) + \sum_{k=I}^{J} (a_k - a_{k+1}) = (a_{J+1} - a_{J+2}) + (a_I - a_{J+1}) = a_I - a_{J+2}$$

Departamento de Ingeniería Matemática - Universidad de Chile