INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA NEWTONIANA

Nelson Zamorano H.

Departamento de Física

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Universidad de Chile

versión 5 de marzo de 2011

Índice general

I. COMPLEMENTO MATEMATICO: Geometría y Trigonometría. 3

I.1. INTRODUCCION 3

I.2. GEOMETRÍA PLANA 3

I.2.1. Unidad angular: grados. 6

I.2.2. Tales de Mileto 6

I.2.3. Otra unidad para medir un ángulo: el Radián. 17

I.3. TRIGONOMETRIA. 19

I.3.1. Funciones seno y coseno: definición geométrica. 19

I.3.2. La Función tangente. 24

I.3.3. Arco y cuerda para ángulos pequeños. 25

I.3.4. Teorema del seno 26

I.3.5. Teorema del coseno 27

I.4. PROBLEMAS PROPUESTOS 29

Índice de figuras

I.1. *Los elementos básicos de geometría que ocuparemos en este capítulo: un punto, una recta, una recta y un punto externo. La intersección de dos rectas y la definición del ángulo generado: α.* 4

I.2. *Distintos tipos de ángulos. Usamos los grados para cuantificar los ángulos. En la siguiente sección definiremos esta medida angular.* 5

I.3. *Sean L_1 y L_2 dos rectas paralelas. Otra recta cualquiera* **S** *las corta en los puntos* **B** *y* **C**. *La misma Figura se repite en la derecha. Allí se aprecia que $x + \gamma = 180^o = y + \gamma$, entonces $x = y$. Estos ángulos son opuestos por el vértice (tal como α en la figura previa) y hemos demostrado que son idénticos.* 5

I.4. *En la Figura se visualizan diversos ángulos: $180°$, $90°$, $45°$, y otros. Se define además, el sentido positivo y negativo de un ángulo.* 6

I.5. *Calculando el área de los dos triángulos acotados por las paralelas, señalados en la Figura, se demuestra la igualdad buscada.* 7

I.6. *Usamos ejes perpendiculares para conectar estos resultados con los sistemas de referencia que usaremos más adelante.* 9

I.7. *En el triángulo* **ABC** *de la izquierda de la Figura, el segmento* **P Q** *es paralelo a la base* **AB**. *Se pide obtener las proporciones señaladas. A la derecha, las rectas paralelas,* $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$, *cortan a dos rectas concurrentes,* **S** *y* **t** *y determinan segmentos proporcionales, por ejemplo: AB/BC = A'B'/B'C'.* 10

I.8. 11

I.9. *En el paralelogramo se utilizan las relaciones entre los ángulos correspondientes y alternos internos de la misma naturaleza. Para el caso de las bisectrices, se construyen tres triángulos congruentes mediante las perpendiculares trazadas desde* **G**. 12

I.10. *En esta demostración usamos dos propiedades de un triángulo: que es isósceles y que un ángulo externo es igual a la suma de los ángulos opuestos.* 14

I.11. 14

I.12. 15

I.13. 18

I.14. *Si el radio de la circunferencia es la unidad, el valor de sen α está dado por la proyección del vector* **OA** *sobre el eje vertical y el valor del coseno es la proyección de este mismo vector sobre el eje horizontal.* 19

I.15. *De la Figura se desprende que $sen(180 - \alpha) = sen\,\alpha$, y cos (90 - α) = sen α.* . . . 21

I.16. *Triángulo ΔABC usado para encontrar geométricamente el valor de $sen(\alpha + \beta)$ en función de la función seno y coseno de los ángulos α y β.* 23

I.17. *Resumen de las definiciones geométricas de las funciones: cotangente, cosecante y secante. La circunferencia tiene radio unitario.* 25

I.18. 26

I.19. *Se grafica la función tangente y seno para ángulos pequeños en radianes. Se puede apreciar que para valores de hasta 0.2, aproximadamente 12^o ambas funciones coinciden. El ángulo alpha en radianes no se grafica pero corresponde a una recta que se confunde con las funciones anteriores en la vecindad del origen.* 27

I.20. *Expresión para el ángulo doble usando el área de los dos triángulos congruentes generados en este rectángulo.* 29

Capítulo I

COMPLEMENTO MATEMATICO: Geometría y Trigonometría.

I.1. INTRODUCCION

La Geometría es una herramienta necesaria en la formulación y análisis de los problemas que nos interesan estudiar en este libro y en Física en general.

Para describir la velocidad y aceleración de un cuerpo, usaremos el cambio de lugar con respecto al tiempo. Este cambio lo expresaremos utilizando geometría: la tangente a la curva que nos da la posición del móvil en cada instante del viaje. Utilizaremos las estrategias geométricas utilizadas por Newton para formular sus leyes.

Comenzaremos con un repaso de la Geometría y Trigonometría relevantes para este curso.

Este libro pretende ser autocontenido. Conviene consultar otras referencias al estudiar algunos de los temas de este capítulo. Esta es -en general- una muy buena práctica.

I.2. GEOMETRÍA PLANA

Es notable que con unos conocimientos elementales de geometría, se puede demostrar mucho resultados de interés en las aplicaciones de mecánica. Por esto comenzamos repasando los teoremas básicos de geometría plana que utilizaremos más adelante.

En general, no demostraremos teoremas. Los ejemplos y ejercicios propuestos presentan raciocinios que resultarán útiles posteriormente o fortalecen la compresión de la materia expuesta.

El desarrollo no pretende reemplazar la lógica ni la estructura de un buen libro de geometría. Es nuestra vía rápida e intuitiva.

Lo básico es un punto. Después una recta, que en geometría, no tiene ni grosor ni límites: se extiende hasta infinito. Lo siguiente, en nuestra aproximación, dos rectas que se cortan y dan origen a un ángulo, α. Para distinguir entre los distintos ángulos que se pueden formar, clasificaremos los ángulos (ver I.2) en agudos, opbtusos, rectos....

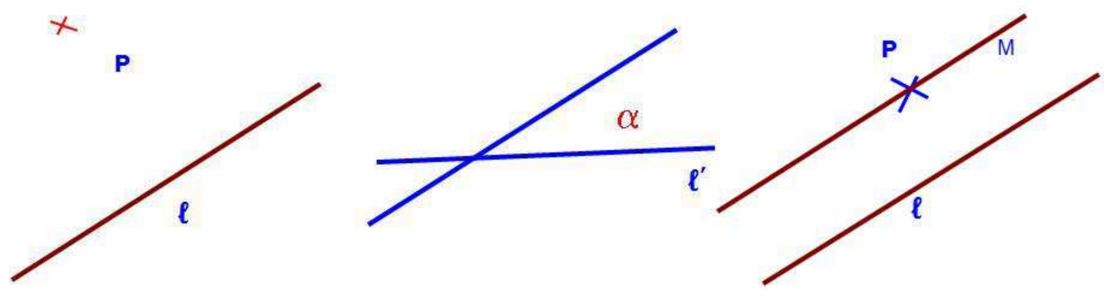


Figura I.1: *Los elementos básicos de geometría que ocuparemos en este capítulo: un punto, una recta, una recta y un punto externo. La intersección de dos rectas y la definición del ángulo generado:* α.

Un caso especial de este último ejemplo (Ver dibujo de la derecha en Figura I.1), es el de una recta ℓ' trazada por un punto externo **P** a otra recta ℓ y tal que nunca se corta con ella. Aceptamos que existe una sola recta que cumple dicha condición. Este es un axioma de Euclides que establece que por un punto **P** fuera de una recta **L** se puede trazar una y sólo una recta $\mathbf{L}^{'}$ que no toca a **L** en ningún punto.

A menudo se requiere definir la naturaleza del ángulo. Las denominaciones usadas aparecen en la figura I.2.

Dado un ángulo, la siguiente construcción puede ser trazar una paralela a una de las líneas originales.

Utilizando la Figura de la izquierda en I.3, demostraremos que los ángulos **ABC** y **BCD** son iguales. Si trasladamos paralelamente la recta L_2 con regla y escuadra hasta alcanzar L_1, ocurre que el ángulos α (inferior en la figura de la izquierda) es igual a X, su equivalente en la Figura de la derecha. Por tanto, como ya demostramos que $x = y$, los dos ángulos identificados con la letra α en la figura de la izquierda son iguales.

Por otraparte, también se puede demostrar que si uno de los ángulos α fuera más pequeño (o más

Figura I.2: *Distintos tipos de ángulos. Usamos los grados para cuantificar los ángulos. En la siguiente sección definiremos esta medida angular.*

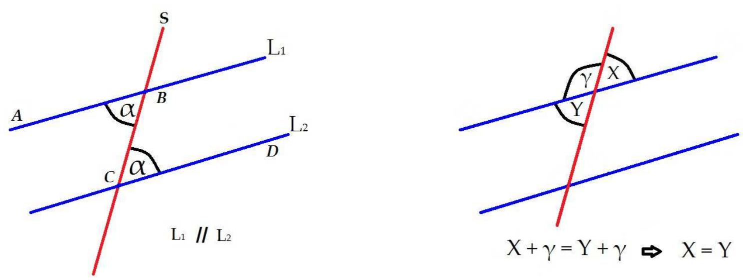


Figura I.3: *Sean L_1 y L_2 dos rectas paralelas. Otra recta cualquiera* **S** *las corta en los puntos* **B** *y* **C**. *La misma Figura se repite en la derecha. Allí se aprecia que $x + \gamma = 180^o = y + \gamma$, entonces $x = y$. Estos ángulos son opuestos por el vértice (tal como α en la figura previa) y hemos demostrado que son idénticos.*

grande) que el otro, entonces las rectas L_1 y L_2 se cortarían en algún punto y no serían paralelas. Los ángulos **ABC** y **BCD** se denominan alternos internos.

Si cortamos este par de rectas paralelas mediante una secante **S**. Entonces podemos verificar, con compás y regla, que todos los ángulos opuestos por el vértice son iguales. Lo mismo ocurre con los ángulos de la misma naturaleza, definidos en la figura, como $\angle$ **SBL**$_1$ = $\angle$ **BCD**. Esto se extiende a todos los ángulos ubicados en posiciones semejantes. En cada uno de ellos se puede verificar la igualdad ideando un método que incluye traslación paralela y rotaciones.
Por ejemplo, ángulos de la misma naturaleza cuyos lados son respectivamente perpendiculares, son iguales. Esto equivale a físicamente rotar rígidamente el ángulo en 90^o y trasladarlo hasta que coincidan.

I.2.1. Unidad angular: grados.

Las unidades angulares más conocidas son: grados, designados por $(^\circ)$, minutos $(')$ y segundos $('')$.

Estas unidades son *sexagesimales*: cada unidad contiene 60 subunidades: 1 grado contiene 60 minutos, 1 minuto contiene 60 segundos. Las mediciones de longitud son *decimales*, 1 metro contiene 10 decímetros, un decímetro 10 centímetros,...

El sistema sexagesimal nació en Babilonia, donde se usó en las mediciones astronómicas que, en ese tiempo, consistían en determinar las posiciones de los planetas y estrellas más brillantes con el objeto de establecer un calendario y predecir eclipses.

En toda definición de unidades, existe un grado de arbitrariedad. Los grados se definen como el ángulo que subtiende $1/360$-ava parte de una circunferencia.

Las equivalencias son las siguientes:

$$
\begin{array}{rcl}
360^\circ & \equiv & \text{un giro completo alrededor de un circunferencia.} \\
180^\circ & \equiv & 1/2 \text{ vuelta alrededor de un circunferencia.} \\
90^\circ & \equiv & 1/4 \text{ de vuelta alrededor de un circunferencia.} \\
45^\circ & \equiv & 1/8 \text{ de vuelta alrededor de un circunferencia.} \\
1^\circ & \equiv & 1/360 \text{ de vuelta alrededor de un circunferencia.} \\
1^\circ & \equiv & 60', \text{ sesenta minutos.} \\
1' & \equiv & 1/216{,}000 \text{ de vuelta alrededor de una circunferencia.} \\
1'' & = & 1/60 \text{ de un minuto.} \\
1'' & \equiv & 1/12{,}960{,}000 \text{ de vuelta alrededor de una circunferencia.}
\end{array}
$$

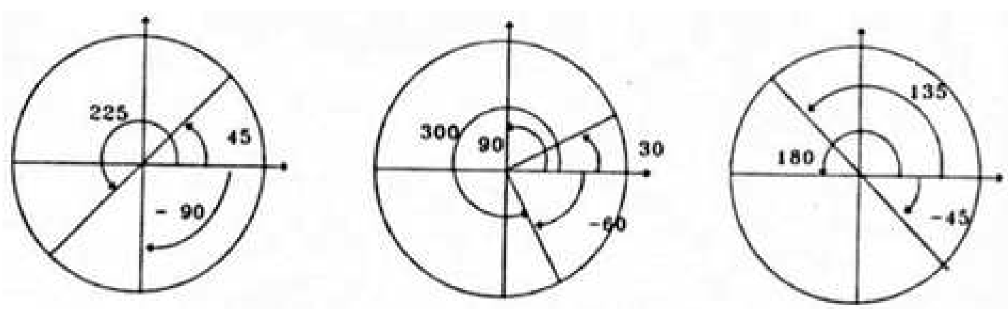


Figura I.4: *En la Figura se visualizan diversos ángulos:* $180^\circ,\ 90^\circ,\ 45^\circ$*, y otros. Se define además, el sentido positivo y negativo de un ángulo.*

I.2.2. Tales de Mileto

Ejemplo

Demostrar que los triángulos formados por las rectas L_1 y L_2, que se cortan en un punto **A**, y las dos rectas paralelas entre ellas y perpendiculares a L_1, se cumple que

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BC}}. \tag{I.1}$$

Solución

Basta con probar que el área del $\triangle$**AEC** es igual al área del $\triangle$**ABD**.

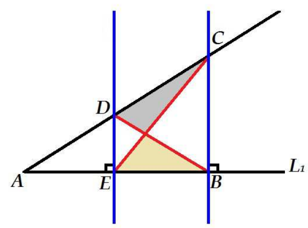


Figura I.5: *Calculando el área de los dos triángulos acotados por las paralelas, señalados en la Figura, se demuestra la igualdad buscada.*

Considere el área de los triángulos $\Delta\, EBD$ y el triángulo $\Delta\, EDC$. Como se puede apreciar de la figura (I.5), es lo que se requiere para demostrar que los dos triángulos: $\triangle$**ABD** y $\triangle$**AEC** tiene áreas iguales.

El área del triángulo $\Delta\, EBD$ es $\mathbf{DE} \times \mathbf{BC}/2$. Sin embargo el área del triángulo $\Delta\, EDC$ es también $\mathbf{BE} \times \mathbf{BC}/2$. Con esto se cumple lo buscado inicialmente. Como las áreas de los triángulos $\triangle$**AEC** y $\triangle$**ABD** son iguales, se cumple que:

$$\mathbf{AE} \times \mathbf{BC} = \mathbf{AB} \times \mathbf{ED}, \quad \text{o,} \quad \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BC}}. \tag{I.2}$$

Este es el teorema de Tales de Mileto para el caso de un triángulo rectángulo.

Demuestre que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}, \tag{I.3}$$

$$\frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}. \tag{I.4}$$

□

Utilizando estos métodos geométricos podemos multiplicar segmentos. Si a cada segmento le asociamos un largo, entonces tenemos una tabla de multiplicar utilizando geometría y la definición de longitud.

Ejemplo

Utilizando estas propiedades geométricas de los triángulos multiplique dos segmentos de longitud **a** y **b**, usando sólo geometría.

Con este ejemplo uno concreta la idea de asociar la recta con los números reales.

Solución

Utilizaremos dos rectas perpendiculares, en lugar de que formen un ángulo cualquiera. No hay restricción con esta elección. Lo hacemos porque nos aproxima a los sistemas de referencia que utilizaremos más adelante.

Considerando estas dos rectas perpendiculares, marcamos un segmento (arbitrario) como la definición de largo unitario: 1, en el eje horizontal.
Marcamos el segmento **a** en el eje vertical. Éste es uno de los segmentos a multiplicar. Marcamos el otro segmento a multiplicar, **b**, en la horizontal. Por el extremo del segmento **a** y del largo unitario **1**, trazamos una recta y por el extremos del segmento **b**, una paralela a la recta anterior. Con esto se obtiene el segmento definido como **c** y que, por el teorema de Tales representa el producto de los segmentos **a** y **b**, $c = ab$, como se indica en la Figura I.6.

¿Qué sucede si **b** (por ejemplo) tiene un largo menor que la unidad?
¿Qué sucede si **b** se dibuja en la parte negativa del eje horizontal?

□

Podemos aprovechar este ejemplo y utilizar estas rectas perpendiculares como un sistema de referencia. En este sistema podemos describir la ecuación de una recta.

Ejemplo

Extendiendo lo aprendido hasta ahora, encontrar la ecuación de una recta en el plano.

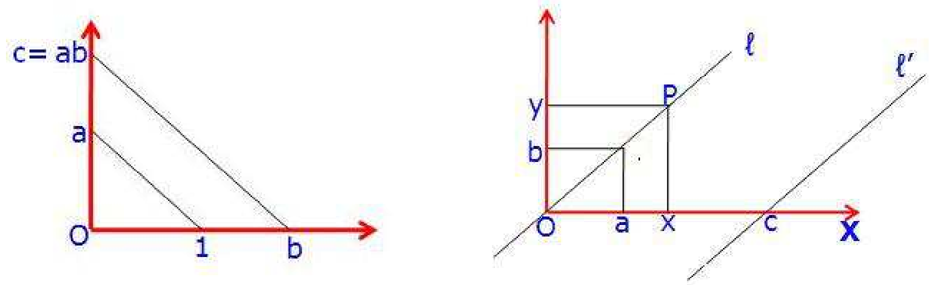


Figura I.6: *Usamos ejes perpendiculares para conectar estos resultados con los sistemas de referencia que usaremos más adelante.*

Solución

Definimos los ejes coordenados X (denominada abcisa) e Y (denominada ordenada).

Usando el resultado anterior, tenemos una escala en cada uno de los ejes: existe un segmento que representa la unidad y que al repetirlo, tenemos un eje graduado. Incluye todos los números reales puesto que podemos multiplicar segmentos de largo abitrario, como vimos en el ejemplo anterior.

La ecuación de una recta es equivalente a encontrar una regla que adjudica a cada valor escogido en el eje horizontal (abcisa) o eje X, un solo valor en el eje Y (ordenada). Este proceso es lo que corresponde a una función, que convencionalmente se define como **y = f(x)**, donde **f(x)** puede ser un polinomio o cualquier curva en un gráfico y vs. x, como **f(x)** $=a\,x^3 - b\,x^2$, con **a** y **b** son constantes y **x** es un número elegido al azar. Volveremos a las funciones al estudiar cinemática.

Primero trazamos una recta cualquiera por el origen y dibujamos dos triángulos semejantes, como se indica en la figura de la derecha (I.6). Escribimos las proporcionalidades asociadas a este triángulo y obtenemos la ecuación de una recta que pasa por el origen:

$$a/b = x/y \implies y = (b/a)\,x.$$

La recta ℓ' que es paralela a ℓ. Copiamos los segmentos **a** y **b** adecuadamente a partir del punto de intersección de ℓ' con la horizontal, y tenemos la igualdad de tales de Mileto sólo que debemos incluir el sdesplazamiento en la coordenada x:

$$y\,/(x - c) = (b/a) \implies y = (b/a)\,x - (b\,c)/a.$$

Corresponde a la ecuación de una recta cualquiera con pendiente b/a y que corta al eje x, en el punto C. La forma convencional de escribir esta ecuación es $y = x + n$. Funciones es el tema del próximo capítulo.

□

Ejercicio

Utilizando el Teorema de Tales de Mileto demuestre las igualdades que se incluyen en la Figura y que relacionan segmentos del triángulo $\triangle\mathbf{ABC}$. Lo mismo se puede repetir para la Figura de la derecha, donde ocurre que:

$$\frac{A\,B}{A\,C} = \frac{A'\,B'}{A'\,C'}$$

entre otras posibilidades.
Esta es la forma general del Teorema de Tales de Mileto.

□

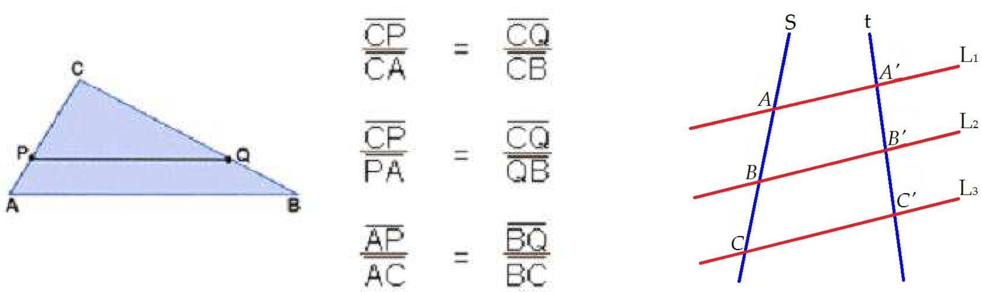


Figura I.7: *En el triángulo* **ABC** *de la izquierda de la Figura, el segmento* **P Q** *es paralelo a la base* **AB**. *Se pide obtener las proporciones señaladas. A la derecha, las rectas paralelas,* $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$, *cortan a dos rectas concurrentes,* **S** *y* **t** *y determinan segmentos proporcionales, por ejemplo: AB/BC = A'B'/B'C'.*

Las proporciones obtenidas tienen muchas aplicaciones en física. El triángulo rectángulo de la figura (I.5), se puede utilizar para generalizar el teorema y obtener otras relaciones entre segmentos que aparecen en la figura de la derecha (I.7).

Podemos mostrar que si dos triángulos tienen sus tres ángulos correspondientes iguales, estos triángulos son semejantes o congruentes (iguales). Si los ángulos son todos iguales, no necesariamente sus lados son iguales. Por ejemplo, los triángulos $\triangle\mathbf{ABC}$ y $\triangle\mathbf{PQC}$ de la Figura I.7.

A continuación utilizamos estos resultados para encontrar algunas propiedades de los triángulos.

Ejemplo

a.- Demostrar que los ángulos interiores de un triángulo suman 180^o.
b.- Demostrar que la prolongación de uno de los lados genera, en el vértice de la intersección con el lado concurrente, un ángulo igual a la suma de los dos ángulos opuestos al vértice de concurrencia.

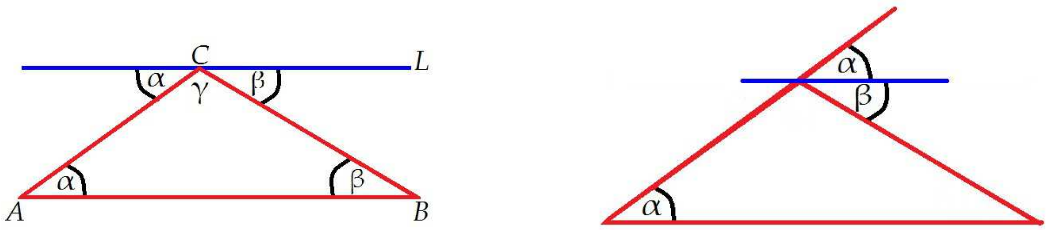


Figura I.8:

Solución

a.- Si por el vértice **C** trazamos una recta **L** paralela a la base $\overline{AB}$, generamos dos ángulos adicionales. Recordando la definición de ángulos alternos internos, podemos identificar los ángulos que por ser de la misma naturaleza y estar entre dos rectas paralelas cortadas por una secante son iguales. Los denominamos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$. De la Figura se desprende que: $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$.

b.- Al prolongar el lado **AC** más allá del vértice **C** se forma una recta y un ángulo de 180^o. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo plano suman precisamente 180^o, se obtiene que el complemento de γ en la figura es $\alpha + \beta$.

$\square$

Con este resultado, podemos ser más precisos al comparar dos triángulos. Por ejemplo, si dos triángulos tienen un lado igual y sus ángulos adyacentes (los que se ubican en cada uno de los vértices de este lado) iguales, entonces los triángulos son iguales.

Para demostrar esto, utilizamos el ejemplo recién resuelto. Podemos probar que el ángulo que falta debe ser igual para ambos triángulos, puesto que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180^o. Entonces ambos triángulos son (al menos) semejantes: tienen todos sus ángulos iguales. Como tienen un lado igual, entonces la razón entre sus lados es la unidad. Por tanto los dos triángulos son iguales.

Ejercicio

Dado un segmento y dos ángulos cuya suma sea menor que 180^0, construir un triágulo. Convencerse que este triángulo es único.
Si nos dan un segmento, un ángulo adyacente y el ángulo que se ubica en el vértice opuesto al segmento dado, ¿podemos afirmar que el triángulo queda totalmente determinado con estos datos? En otras palabras: ¿es único?

Si los datos incluyen: dos lados con un vértice común y el ángulo comprendido: el triángulo resultante ¿es único?.

□

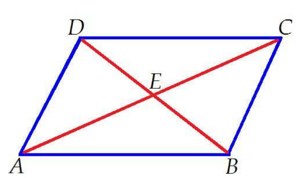
Ejemplo

Demuestre que las diagonales de un paralelogramo se dimidian.

Solución

Por definición en un paralelogramo sus lados opuestos son iguales y paralelos. Por tanto los triángulos $\triangle$**ABE** y $\triangle$**CED** son iguales. Tienen un lado igual y sus dos ángulos adyacentes iguales (son ángulos alternos internos). Al ser iguales sus lados respectivos son iguales y por tanto el punto **E** dimidia la diagonal.

□



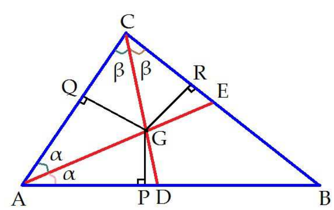


Figura I.9: *En el paralelogramo se utilizan las relaciones entre los ángulos correspondientes y alternos internos de la misma naturaleza. Para el caso de las bisectrices, se construyen tres triángulos congruentes mediante las perpendiculares trazadas desde* **G**.

Ejemplo

a.- Demostrar que las tres bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo se cortan en un solo punto.

b.- Demostrar que las tres alturas de un triángulo se cortan en un solo punto.

c.- Demostrar que las tres simetrales (rectas que perpendiculares a cada uno de los lados de un triángulo y trazadas por el punto medio de los lados respectivos) se cortan en un solo punto.

d.- Demostrar que las tres transversales de gravedad (rectas que unen el vértice con el punto medio del lado opuesto) de un triángulo se cortan en un solo punto.

Solución de la parte a.-

Si trazamos dos bisectrices, necesariamente se cortan en un punto **G** (no pueden ser paralelas).

A partir de dicho punto **G** se traza una perpendicular a cada uno de los lados del triángulo. Con esta construcción se forman dos pares de triángulos en cada vértice donde se trazó la bisectriz. En cada par se verifica que tienen un lado común, uno de los ángulos adyacentes a dicho lado (por ser bisectriz) y como el ángulo opuesto al lado común es de 90^o, todos los ángulos son iguales. De este modo demostramos que cada par de triángulos es congruente .

Como ocurre que $\mathbf{GP} = \mathbf{GQ}$ y en el vértice **C**, se tiene $\mathbf{GQ} = \mathbf{GR}$,entonces $\mathbf{GP} = \mathbf{GR}$. Si unimos el vértice **B** con **G**, el par de triángulos $\triangle$ **BPG** y $\triangle$**BGR** son congruentes, por las mismas razones anteriores. Con esto hemos demostrado que **BG** es la bisectriz del águlo β correspondiente al vértice **B** y por tanto las tres bisectrices se cortan en un solo punto que denominamos **G**.

$\square$

Ejemplo

Considere un ángulo cualquiera inscrito en la circunferencia (su vértice está en la circunferencia). Demuestre que el ángulo inscrito α es la mitad del ángulo central β (cuyo vértice está en el centro de la circunferencia) que subtiende el mismo arco.

Usando este resultado muestre que todo triángulo rectángulo, está inscrito en una circunferencia donde su hipotenusa coincide con un diámetro de la circunferencia.

Solución

Considere el ángulo α simétrico con respecto al centro de la circunferencia (Figura izquierda). Si denominamos α a la mitad del ángulo del vértice, entonces el ángulo central que subtiende el

Figura I.10: *En esta demostración usamos dos propiedades de un triángulo: que es isósceles y que un ángulo externo es igual a la suma de los ángulos opuestos.*

mismo arco es $\beta = 2\,\alpha$, puesto que es el ángulo externo del triángulo isósceles $\triangle$**AOB** es -como demostramos-, el doble del ángulo de la base del triángulo isósceles.

A la derecha aparece un caso más general. Si trazamos un diámetro desde el vértice **A** del ángulo α, se forma el ángulo $\alpha + \gamma$ en el vértice. Con el raciocinio del párrafo anterior, tenemos que el ángulo central es $\beta + 2\,\gamma = 2\,[\,\alpha + \gamma\,]$. Si consideramos sólo el ángulo del vértice γ y el $\triangle$**BOA**, vemos que debemos restar el ángulo $2\,\gamma$ del ángulo central porque al ángulo sumado en el vértice al trazar el diámetro. Lo que resta es la respuesta buscada $\beta = 2\,\alpha$.

$\square$

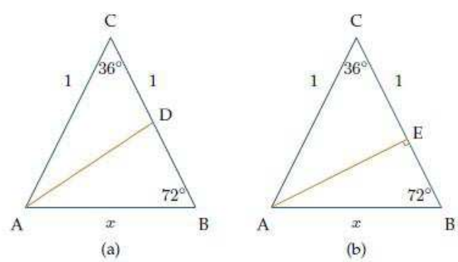


Figura I.11:

Ejemplo

Considere un triángulo isósceles cuyo ángulo del vértice tiene un valor de 36^o, sus lados iguales tienen una longitud unitaria y su base un largo x, cuyo valor desconocemos. Ver figura (I.11)

Con sólo estos datos, encuentre el valor de x, sin utilizar el valor de $\sin 36^o$ o $\cos 36^o$ o cualquier otro.

Solución

A partir del vértice **A** trazamos una bisectriz del ángulo de la base. El ángulo tiene, en consecuencia, 36^o. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180^o, entonces el ángulo $\angle$**ADB** = 72^o. De modo que el triángulo $\triangle$**ADB** es isósceles y semejante al triángulo primitivo $\triangle$**ABC**, porque tienen un ángulo común (36^o) y ambos son isósceles. También el triángulo $\triangle$**ADC** es isósceles, porque los ángulos $\angle$**DAC** = $\angle$**ACD** = 36^o. De este modo **CD** = **AD**. Como el triángulo $\triangle$**BAD** es isósceles, entonces **AD** = **x**.
Si hacemos coincidir los vértices **A** con **C** de los triángulos $\triangle$**ADB** y $\triangle$**ABC**, respectivamente, entonces por el Teorema de Tales tenemos que:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{DB}, \qquad \text{pero como} \quad DB = CB - CD = 1 - CD = 1 - x,$$

obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}, \quad \Longrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0. \quad x = [\sqrt{5} - 1]/2.$$

Consideramos solo la raíz positiva, puesto que **x** debe ser positivo. Con este resultado hemos resuelto el problema.

Podemos calcular las funciones trigonométricas del ángulo 36^o y algunos de sus múltiplos si trazamos una perpendicular a **BC** desde **A**. Dejamos este ejercicio propuesto.

□

Figura I.12:

Ejemplo

Encuentre el valor del ángulo α en el triángulo de la figura (I.12). El triángulo es isósceles ($|$**AC**$|$ = $|$**CB**$|$ = 1) y el valor del ángulo en el vértice **C** es de 80^o. A partir del vértice **A** se traza una recta que forma un ángulo de 40^o con la base del triángulo. Lo mismo a partir de **B**, pero en con un ángulo de 30^o. A partir del punto de intersección de estas dos rectas, **P**, se traza una recta hasta el vértice **C**.

NOTA: los ángulos no están dibujados con la medida exacta sino a mano alzada. Por tanto no debe guiarse por propiedades del dibujo sin verificarlas analíticamente.

Solución

Este es un problema difícil. Es la suma de varios problemas simples que ya hemos planteado. Por ejemplo, en nuestro enfoque, es preciso trazar una altura y trabajar con las propiedades del nuevo triángulo generado para determinar el valor del ángulo α. Es posible que exista un camino más fácil [1]

Empezamos trazando la altura desde el vértice **C** hasta la base del triángulo dado. (Note que este paso abre la puerta a una forma de resolver este problema. Nos enseña que en geometría no podemos quedarnos mirando la figura, es preciso descubrir simetrías trazando rectas...).

Por ser un triángulo isósceles, la altura se confunde con la bisectriz en dicho vértice (y solo en este vértice). En la intersección (punto **Q**) de la altura con el trazo **BP**, se forma un triángulo isósceles $\triangle$**AQB**. Los ángulos de la base, adyacentes a **AB**, miden 30^o de acuerdo a los datos del problema.
Consideremos el triángulo $\triangle$**AQC**. El ángulo $\angle\mathbf{AQP} = 60^o$, por ser igual a la suma de los ángulos de la base del triángulo $\triangle$**AQB**. Prolongamos el tramo **BP** hasta cortar el lado **AC**. Se forma el punto **D**. Por el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo (en este caso $\triangle$**ABD**) tenemos que $\angle\mathbf{BDA} = 100^o$ y por tanto $\angle\mathbf{QDC} = 80^o$, y $\angle\mathbf{CQD} = 60^o$ (esto porque el ángulo $\angle\mathbf{DCQ} = 40^o$ por ser la bisectriz del ángulo del vértice).

En el punto **P** confluyen dos bisectrices **AP** y **QP**. **AP** es bisectriz del ángulo $\angle$**QAD**. Como las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto, entonces **CP** debe ser la bisectriz del ángulo $\angle$**DCQ**, por tanto el ángulo $\angle\mathbf{DCP} = 20^o$. Con esto conocemos el valor del ángulo $\angle\mathbf{PCB} = 60^o$, y por la suma de los ángulos interiores de un triángulos tenemos la respuesta: $\alpha = 100^o$.

Note que una vez resuelto el problema descubrimos que el triángulo $\triangle$**AQD** es semejante al triángulo $\triangle$**CPB**. Tienen tres ángulos iguales. Quizás existe una manera de demostrar esta semejanza de triángulos desde un comienzo. No lo sabemos.

$\square$

[1] Esta aproximación fue propuesta por el alumno Mario Ahumada Durán.

I.2.3. Otra unidad para medir un ángulo: el Radián.

¿Qué es un Radián?

Para responder esta pregunta realicemos la siguiente operación. Con un compás, dibuje varios círculos de distinto radio en un papel. No olvide marcar su centro. Para cada circunferencia corte un trozo de hilo con un largo igual al radio de la circunferencia correspondiente. ¿Cuántos de trozos de hilo (y sus fracciones, aproximadas) se requieren para lograr completar el largo de la circunferencia correspondiente?[2]

A partir de esta comprobación resulta natural definir un radián como el ángulo central que subtiende un arco de longitud igual al radio. Es el mismo ángulo para todas las circunferencias.

La definición de **radián** es independiente del radio de la circunferencia.

La longitud de la circunferencia de un círculo unitario es $(2\pi \cdot 1)$. De acuerdo a la definición anterior, el ángulo central que subtiende dicho arco es 2π radianes.

Ejemplo

Considere una rueda sobre un plano. Marque un radio desde el centro al punto de contacto. Desplace la rueda, sin resbalar, una distancia igual a su radio. ¿Cuál es el valor del ángulo descrito en dicho movimiento?

Por definición es un radián, puesto que al no resbalar el camino recorrido es igual al arco que subtiende el ángulo central.
Note que la distancia que avanza el eje de la rueda depende del tamaño de su radio, no así el ángulo.

Si el eje (o centro de la circunferencia) avanza la mitad del radio, puede verificar que el ángulo descrito es también la mitad de un radián.

Establecemos este resultado como una ley:

La longitud de un arco cualquiera de circunferencia es igual al ángulo central, **medido en radianes** por el radio de la circunferencia. Este resultado es válido para cualquier valor del arco, ya sea pequeño o grande.

[2]Se requiere el mismo número de trozos de hilo y su correspondiente fracción del largo.

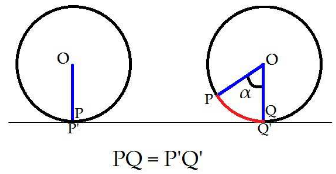


Figura I.13:

$$\text{Longitud del arco de } \odot \;=\; [\text{Ángulo subtendido (en radianes)}] \times [\text{Radio de la } \odot].$$

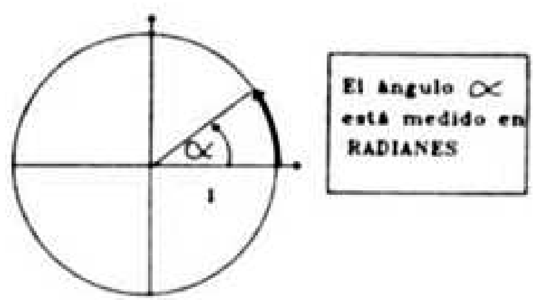
$$360^\circ \;=\; 2\,\pi \;=\; 6,28318... \qquad \text{radianes.}$$

La equivalencia con los grados es:

$$1 \text{ radián} \quad = \frac{360^\circ}{2\,\pi} = 57,29^\circ,$$

aplicando esta conversión podemos obtener las siguientes relaciones:

90° equivalen a $(\pi/2)$ radianes,
45° equivalen a $(\pi/4)$ radianes,
30° equivalen a $(\pi/6)$ radianes,
60° equivalen a $(\pi/3)$ radianes.



Ejercicio.

1.- Exprese en radianes los ángulos: a) 45^o, b) 30^o, c) $22^o\ 30'$.

2.- Exprese en grados sexagésimales los ángulos: a) $3\,\pi/4$, b) $7\,\pi/4$, c) $0,3927$ radianes.

3.- ¿A cuántos radianes equivale un segundo? ¿A cuántos segundos equivale un radián?

4.- La manilla de una máquina da 35 vueltas por minuto sin cambiar su rapidez. ¿Cuánto tiempo tarda en girar 5 radianes?

Nota: una medida de rotación en ingeniería es RPM, que son revoluciones (giros completos) por minuto. Por ejemplo para que un auto viaje a 120 km/h, su motor gira a 3000 RPM, aproximadamente.

□

I.3. TRIGONOMETRIA.

I.3.1. Funciones seno y coseno: definición geométrica.

Utilizaremos un triángulos rectángulo $\triangle$**OBA** para definir las funciones trigonométricas básicas: seno, coseno y tangente.

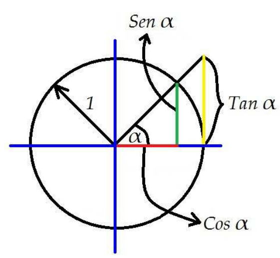


Figura I.14: *Si el radio de la circunferencia es la unidad, el valor de sen* α *está dado por la proyección del vector* **OA** *sobre el eje vertical y el valor del coseno es la proyección de este mismo vector sobre el eje horizontal.*

Seno y Coseno de un ángulo

En un triángulo rectángulo $sen\,\alpha$ es la razón entre el **cateto opuesto** al ángulo α y la hipotenusa.

Coseno de α, ($cos\,\alpha$) es la razón entre el **cateto adyacente** al ángulo y la hipotenusa del triángulo rectángulo en la figura I.14.

Al igual que los casos anteriores es conveniente referir las medidas a una circunferencia de radio unitario. Como en este caso la hipotenusa es la unidad, el valor del coseno está dado directamente por la magnitud del cateto adyacente al ángulo y el seno por la magnitud del cateto opuesto. Las propiedades encontradas para este triángulo serán válidas también para la familia de triángulos semejantes a él.

Definición

$$\begin{aligned} sen\,\alpha &\equiv \frac{|AB|}{|OA|} = |AB|, \qquad\qquad |OA| = 1, \\ cos\,\alpha &\equiv \frac{|OB|}{|OA|} = |OB|, \qquad\qquad |OA| = 1. \end{aligned} \tag{I.5}$$

A continuación se incluyen algunos valores de estas funciones que debemos *recordar*:

$$\begin{array}{ll} sen\,0^\circ = 0, & \cos\,0^\circ = 1, \\ sen\,90^\circ = 1, & \cos\,90^\circ = 0, \\ sen\,45^\circ = 1/\sqrt{2}, & cos\,45^\circ = 1/\sqrt{2}, \\ sen\,30^\circ = 1/2, & cos\,30^\circ = \sqrt{3}/2, \\ sen\,60^\circ = \sqrt{3}/2, & cos\,60^\circ = 1/2, \end{array}$$

Propiedades de estas funciones

1.– Como en un triángulo rectángulo se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, y en el triángulo de la Figura I.14, $a = sen\alpha$, $b = \cos\,\alpha$ y $c = 1$, entonces

$$(sen\,\alpha)^2 + (\cos\,\alpha)^2 = 1 \tag{I.6}$$

para **cualquier ángulo** α.

(Por convención $(sen\,\alpha)^2 \equiv sen^2\alpha$.)

Esta igualdad se puede comprobar con la lista de valores para el seno y el coseno que se incluyó más arriba.

2.– De la circunferencia de radio unitario se obtiene que,

$sen\,\alpha = |AB| \equiv |OC|$ (puesto que $CA \,||\, OB$),

al mismo tiempo, $|OC| = \dfrac{|OC|}{|OA|} \equiv \cos(90 - \alpha)$,

de acuerdo a la definición de coseno. De aquí tenemos:

$$cos(90 - \alpha) = sen\,\alpha. \tag{I.7}$$

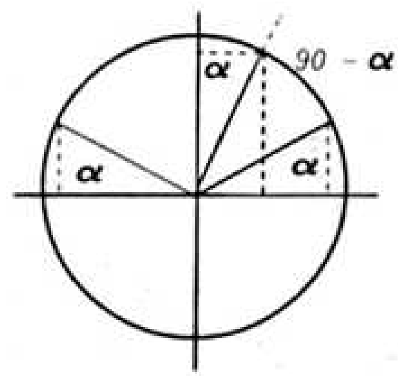


Figura I.15: *De la Figura se desprende que* $sen(180 - \alpha) = sen\,\alpha$, *y cos (90 -* α*) = sen* α*.*

Esta igualdad se puede verificar con los valores que aparecen en la lista de funciones seno y coseno incluídas anteriormente, usando geometría como se indica en la Figura I.15.

3.– Otra propiedad que escribimos a continuación, y que deduciremos más adelante es

$$sen\,2\,\alpha = 2\,sen\,\alpha\,\cos\,\alpha. \tag{I.8}$$

Ejercicio

Usando la misma figura I.15 demuestre:

$$sen(90 - \alpha) = \cos\alpha, \quad sen\,(180°) = 0, \quad \cos\,(180°) = -1,$$

$$sen\,(270°) = -1, \quad \cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad sen(-30°) = -1/2.$$

Definición

La rotación de los punteros del reloj se define como **SENTIDO NEGATIVO**. Obviamente el **SENTIDO POSITIVO** es el opuesto y se indica en la Figura. Esta definición es compatible con la regla de la mano derecha.

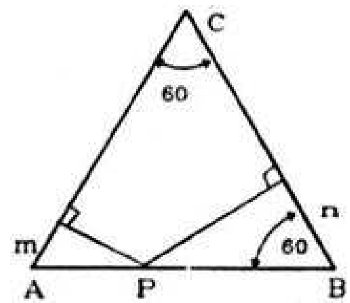
Ejemplo

Desde un punto **P** de un lado de un triángulo equilátero de lado **a**, se trazan dos perpendiculares a los lados. Los valores *m* y *n* son datos (valores conocidos). Encontrar el valor del área del triángulo en función de *m* y *n*. (Ver Figura).

Solución:

Defino $x = AP,\ y = PB$ con $x + y = a$.

$$\begin{aligned} x\, cos\, 60° &= m \\ y\, cos\, 60° &= n \\ m/x = cos\, 60° &= \tfrac{1}{2} \\ n/y = cos\, 60° &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$



De las igualdades anteriores tenemos: $x = 2\,m$, $y = 2\,n$, de modo que $a = 2\,(m+n)$.

El área de un triángulo es $1/2\times$ base $\times$ altura = $1/2\ \times\ a\ \times\ h$ = $1/2\ \times\ a\ \times\ a\sqrt{3}/2$, porque $h = a \times \cos\, 30° = a\,\sqrt{3}/2$.

De esta forma, el área resulta ser

$$\text{Área}\ =\ \sqrt{3}\,(m+n)^2.$$

Se puede obtener el área en función de **m** y **n** usando semejanza entre triángulos. para ello es necesario trazar la altura del $\triangle$**ABC** desde el vértice **C** y establecer la semejanza de este triángulo con aquellos triángulos rectángulos con vértice en **P**.(**Ejercicio**).

Suma y Resta de Funciones Trigonométricas

Repasemos algunas igualdades,

$sen(180-\alpha) = sen\,\alpha$ (como se puede demostrar a partir de la figura).

$\cos(180-\alpha) = -\cos\,\alpha.$

Del triángulo de la Figura I.16, después de un cálculo tedioso, se obtiene la igualdad siguiente:

$$sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha\ \cos\,\beta + \cos\,\alpha\ sen\,\beta. \tag{I.9}$$

Usando el $\triangle$**ABC** de la Figura I.16, y comenzando por el segundo miembro de la igualdad anterior, podemos demostrar esta identidad trigonométrica.

$$\cos\,\alpha\,sen\,\beta + \cos\,\beta\,sen\,\alpha = \frac{1}{|AC|\bullet|BC|}\,[|AD|\bullet|CD| + |BD|\bullet|CD|]$$

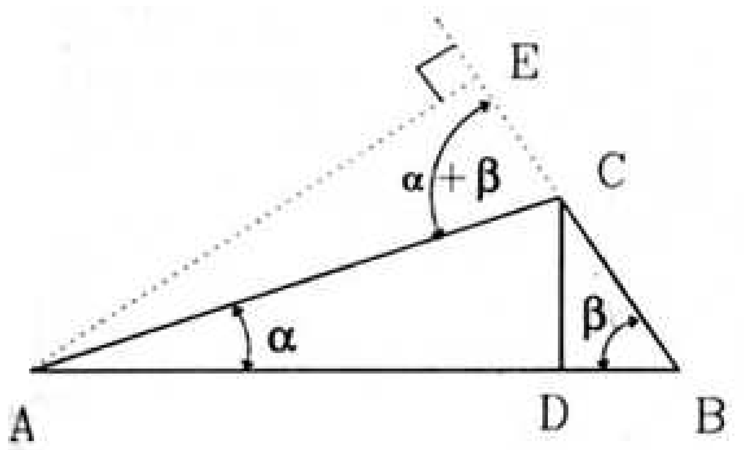


Figura I.16: *Triángulo ΔABC usado para encontrar geométricamente el valor de $sen(\alpha+\beta)$ en función de la función seno y coseno de los ángulos α y β.*

pero, los dos productos que aparecen entre corchetes son formas equivalentes de calcular el área de este triángulo:

$$|AD|\cdot|CD| \;=\; 2\times \text{ área del } \Delta, ADC,$$

$$|BD|\cdot|CD| \;=\; 2\times \text{ área del } \Delta BCD$$

Reemplazando este resultado en la expresión original

$$\cos\,\alpha\, sen\,\beta + \cos\,\beta\, sen\,\alpha = 2\times(\text{área del } \Delta ABC)/\left[|AC|\bullet|BC|\right],$$

ahora recordando que el área del triángulo se puede escribir como

$$\frac{1}{2}\,|AE|\bullet|BC|, \text{ obtenemos}$$

$$= 2\,\frac{1}{2}\,|AE|\bullet|BC|/|AC|\bullet|BC| = AE/AC \equiv sen(\alpha+\beta).$$

Esta demostración constituye un buen ejercicio para practicar las definiciones de seno y coseno. El resultado obtenido es usado con frecuencia.

Otra igualdad trigonométrica tan usada como la anterior es large

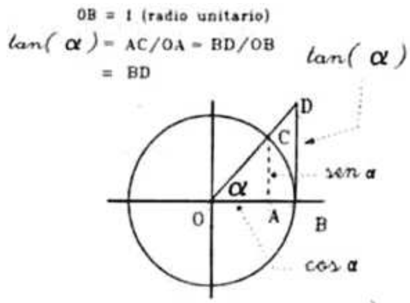
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\,\alpha\;\cos\,\beta - sen\,\alpha\;sen\,\beta. \tag{I.10}$$

I.3.2. La Función tangente.

La **tangente** de un ángulo es la razón entre el cateto opuesto al ángulo y el adyacente en un triángulo rectángulo.

$$\tan\,\alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{BD}{OB} = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{(I.11)}$$

La función tangente, a diferencia de las funciones seno y coseno, puede tomar cualquier valor entre $+\infty$ y $-\infty$.



Algunos valores que aparecen frecuentemente se tabulan a continuación:

$$\begin{array}{ll}
\tan(\pi/2) & = +\infty, \\
\tan\,0 & = 0, \\
\tan(-\pi/2) & = -\infty, \\
\tan(\pi/4) = \tan\,45^\circ & = 1, \\
\tan(\pi/3) = \tan\,60^\circ & = \sqrt{3}, \\
\tan(\pi/6) = \tan\,30^\circ & = 1/\sqrt{3}, \\
\tan(-\pi/3) = \tan\,-60^\circ & = -\sqrt{3}
\end{array}$$

Ejercicio

Utilizando la definición de la tangente en funcion de seno y coseno, demuestre que

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\,\alpha + \tan\,\beta}{1 - \tan\,\alpha \bullet \tan\,\beta}. \quad \square$$

$\square$

Cada función trigonométrica posee una inversa. Esto es análogo al caso de los números reales: por cada número real distinto de cero, existe un inverso $(x\epsilon\ \Re, x \neq 0)$

$$x \bullet \frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x} \bullet x.$$

$$cotan\,\alpha \bullet tan\,\alpha = 1, \quad cotan\,\alpha \equiv \text{cotangente de } \alpha = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{BD} \qquad \text{(I.12)}$$

$$
\begin{aligned}
sen\,\alpha \bullet cosec\,\alpha = 1, &\qquad cosec\,\alpha = \tfrac{AC}{CB},\\
cos\,\alpha \bullet sec\,\alpha = 1, &\qquad sec\,\alpha = \tfrac{AC}{AB},\\
cosec\,\alpha &\qquad \equiv \text{cosecante de } \alpha,\\
sec\,\alpha &\qquad \equiv \text{secante de } \alpha.
\end{aligned}
\tag{I.13}
$$

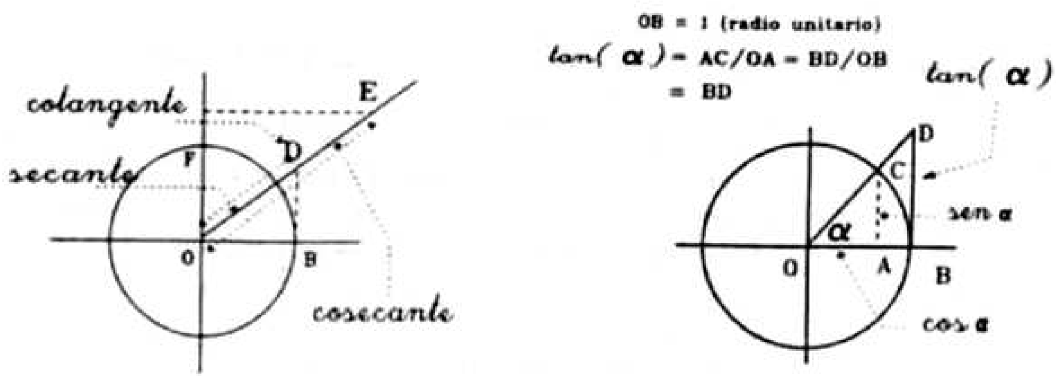


Figura I.17: *Resumen de las definiciones geométricas de las funciones: cotangente, cosecante y secante. La circunferencia tiene radio unitario.*

I.3.3. Arco y cuerda para ángulos pequeños.

La definición geométrica de las funciones trigonométricas es la circunferencia de radio unitario. Usando esta misma herramienta geométrica podemos extraer una aproximación muy útil en los desarrollos de problemas en física. Consiste en considerar los casos en que el ángulos α es muy pequeño (siempre medido en radianes) de forma que podemos aproximar el arco de circunferencia subtendido por el ángulo α con la cuerda que une ambos extremos. Esta descripción está graficada en la Figura I.18.

A continuación ponemos estas afirmaciones en ecuaciones.

IMPORTANTE

Las siguientes *aproximaciones* son usadas con mucha frecuencia en física.

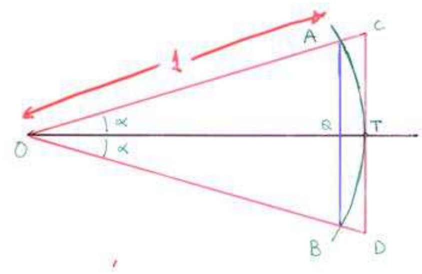


Figura I.18:

Si α es muy pequeño ($\alpha \ll 1$), se cumple que:

$$
\begin{aligned}
sen\,\alpha &\simeq \alpha + O(\alpha^3) \\
cos\,\alpha &\simeq 1 - \tfrac{\alpha^2}{2} + O(\alpha^4) \\
\tan\,\alpha = sen\,\alpha / cos\,\alpha &\simeq \alpha/(1-\alpha^2) \simeq \alpha(1+\alpha^2) \\
&\simeq \alpha + O(\alpha^3)
\end{aligned}
\tag{I.14}
$$

entonces, a primer orden en α, (es decir:despreciando todas las potencias de α superiores a 1), se cumple:

$$\tan\,\alpha \simeq \alpha \simeq \mathrm{sen}\,\alpha. \quad \square \tag{I.15}$$

El ángulo α debe ser medido en radianes para que estas aproximaciones sean válidas.

I.3.4. Teorema del seno

Usando sólo geometría podemos encontrar una relación entre el seno de un ángulo interior de un triángulo y la longitud del lado que lo enfrenta. Esta relación es el teorema del seno.

$$
\begin{aligned}
h_1 = b\,sen\,\alpha \quad & h_1 = a\,sen\,\beta \\
\Longrightarrow \frac{a}{sen\alpha} \quad & = \frac{b}{sen\beta} \\
h_2 = c\,sen\,\beta \quad & h_2 = b\,sen\,\gamma \\
\Longrightarrow \frac{b}{sen\,\beta} \quad & = \frac{c}{sen\,\gamma}
\end{aligned}
$$

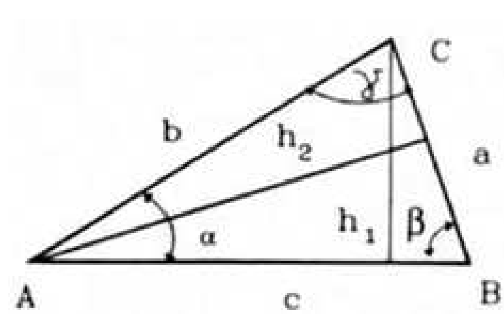


GRÁFICO SEN y TAN α			
SEN A	A-RADIANES	TAN A	A-GRADOS
0,0100	0,01	0,0100	0,5729
0,0200	0,02	0,0200	1,1458
0,0300	0,03	0,0300	1,7187
0,0400	0,04	0,0400	2,2916
0,0500	0,05	0,0500	2,8645
0,0600	0,06	0,0601	3,4374
0,0699	0,07	0,0701	4,0103
0,0799	0,08	0,0802	4,5832
0,0899	0,09	0,0902	5,1561
0,0998	0,1	0,1003	5,729
0,1098	0,11	0,1104	6,3019
0,1197	0,12	0,1206	6,8748
0,1296	0,13	0,1307	7,4477
0,1395	0,14	0,1409	8,0206
0,1494	0,15	0,1511	8,5935
0,1593	0,16	0,1614	9,1664
0,1692	0,17	0,1717	9,7393
0,1790	0,18	0,1820	10,3122
0,1889	0,19	0,1923	10,8851
0,1987	0,2	0,2027	11,458
0,2085	0,21	0,2131	12,0309
0,2182	0,22	0,2236	12,6038
0,2280	0,23	0,2341	13,1767
0,2377	0,24	0,2447	13,7496
0,2474	0,25	0,2553	14,3225
0,2571	0,26	0,2660	14,8954
0,2667	0,27	0,2768	15,4683
0,2764	0,28	0,2876	16,0412
0,2860	0,29	0,2984	16,6141
0,2955	0,3	0,3093	17,187
0,3051	0,31	0,3203	17,7599
0,3146	0,32	0,3314	18,3328

El gráfico muestra el grado de acercamiento entre el sen, la tangente y alpha medido en radianes.

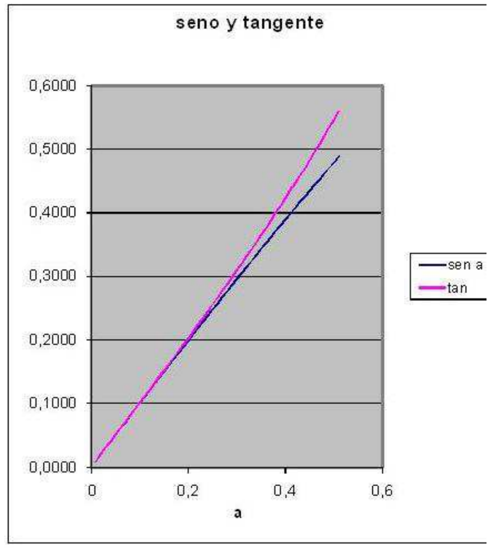


Figura I.19: *Se grafica la función tangente y seno para ángulos pequeños en radianes. Se puede apreciar que para valores de hasta 0.2, aproximadamente 12º ambas funciones coinciden. El ángulo alpha en radianes no se grafica pero corresponde a una recta que se confunde con las funciones anteriores en la vecindad del origen.*

De aquí se obtiene *el teorema del seno*:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma}. \tag{I.16}$$

I.3.5. Teorema del coseno

Aplicando el Teorema de Pitágoras a los triángulos que aparecen en la misma Figura, se tiene

$h_2^2 = b^2 - x^2,$ $\quad$ $h_2^2 = c^2 - y^2,$

$b^2 - x^2 = c^2 - y^2,$ $\quad$ $y = a - x,$

expresando y en función de x: $b^2 = c^2 - a^2 + 2\,a\,x,$

pero: $x = b\,cos\,\gamma,$

introduciendo este término en la última igualdad, obtenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\,\gamma. \tag{I.17}$$

Ejercicio

Demostrar que

$$\begin{aligned} a^2 &= \ b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,cos\,\alpha, \\ b^2 &= \ a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,cos\,\beta, \\ c^2 &= \ a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos\,\gamma. \end{aligned} \tag{I.18}$$

Ejercicio

Descubra una regla nemotécnica que le permita recordar las fórmulas anteriores.
¿Qué ocurre con el signo frente al término que contiene el coseno de uno de los ángulos cuando éste es mayor que $\pi\,/\,2$?

Ejemplo

a.- Encuentre, usando sólo geometría, la expresión para el ángulo doble sen(2 α) en función del ángulo original, por ejemplo sen(α) y constantes numéricas.

b.- Encuentre, geométricamente una expresión para $\cos(2\alpha)$ en función de $\mathrm{sen}\ \alpha$ y constantes numéricas. Usando el teorema de Pitágoras exprese $\cos(2\,\alpha)$ en función de potencias de $cos\alpha$ más constantes numéricas.

c.- Muestre que los dos resultados anteriores se desprenden directamente de la expresión obtenida anteriormente para el seno y coseno de la suma de ángulos.

Solución

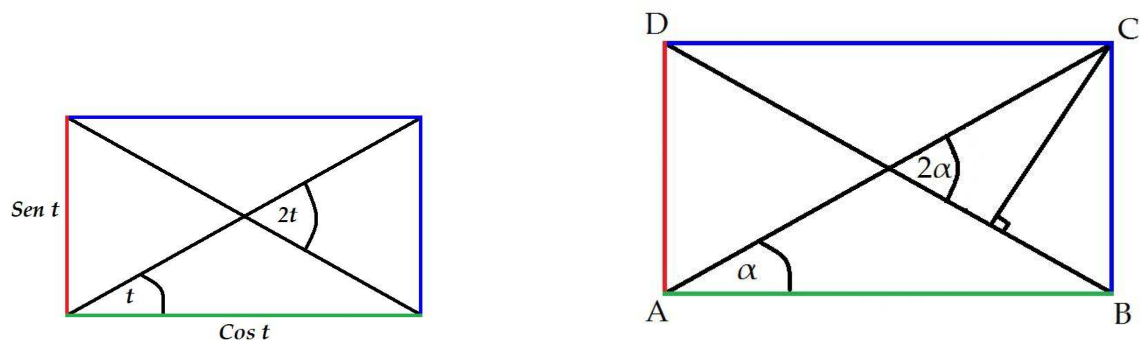


Figura I.20: *Expresión para el ángulo doble usando el área de los dos triángulos congruentes generados en este rectángulo.*

La estrategia es calcular el área del triángulo inferior usando los lados del rectángulo (construido a propósito)y calcular el área del triángulo superior utilizando la diagonal del rectángulo y la altura. Como ambos triángulos son congruentes, las expresiones son iguales y por tanto obtenemos una ecuación que contiene la expresión buscada.

El área del triángulo inferior está escrita a la izquierda, le del triángulo superior a la derecha:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\;\alpha\;\cos\;\alpha\;=\;\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{sen}\;2\,\alpha}{2}$$

de esta forma obtenemos

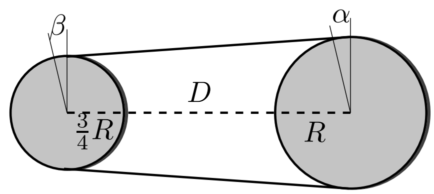
$$\mathrm{sen}(\,2\,\alpha)\;=\;2\;\mathrm{sen}\;\alpha\;\cos\alpha. \tag{I.19}$$

I.4. PROBLEMAS PROPUESTOS

1. a) Encuentre el valor de los ángulos α y β que miden el alejamiento angular del punto de contacto de la correa y la circunferencia con respecto a la vertical.

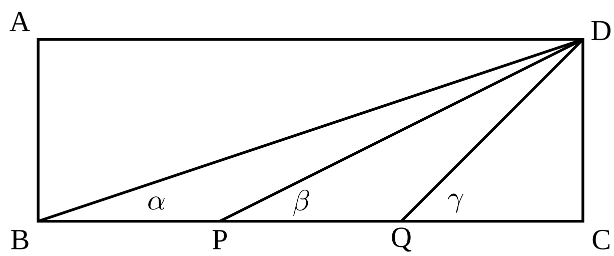
   b) Calcule el largo de la cuerda que rodea a dos cuerdas de radios R y $3R/4$ cuyos ejes están separados por una distancia D.

   c) Calcule el área encerrada por los segmentos de la cuerda situada entre los puntos en que toca a las ruedas y la circunferencia de cada una de las ruedas.

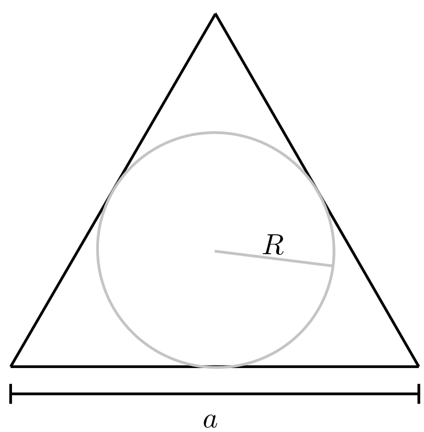


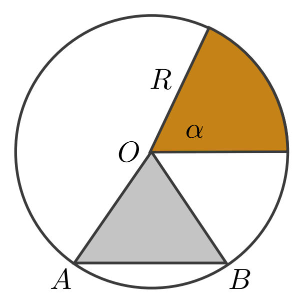
2. Considere un rectángulo $ABCD$ donde el lado $BC = 3\,AB$, y P, Q son dos puntos sobre el lado BC que dividen el lado en tres partes iguales, es decir, donde $BP = PQ = QC$. Demuestre que, en este caso particular, ocurre que: $\alpha + \beta = \gamma$.
   Para ver que éste es un caso particular, desplace el punto Q acercándolo, por ejemplo, a C. El otro punto P permanece fijo. En este caso, el ángulo γ aumenta, pero α y β permanecen iguales y por tanto la igualdad no se cumple.

   NOta: Utilice la expresión para la suma de ángulos en la tangente: $\tan(\alpha + \beta)$.



3. Calcule la razón entre las áreas de un círculo de radio R y del triángulo equilátero de lado a que lo contiene. Exprese el radio R en función de a.



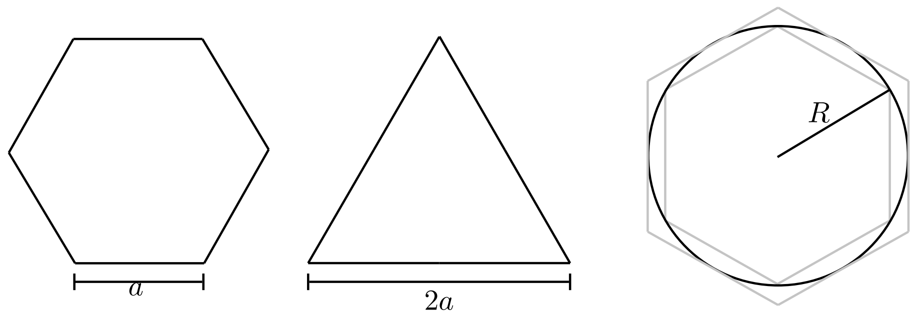


4. a) Calcule el área del triángulo ABO en función del ángulo $\angle AOB$ y el radio R de la circunferencia. Grafique (a mno alzada) el área de este triángulo en función de α. Por ejemplo, calcule el área para $\alpha = \pi/4$,
   $pi/2$, $3\,\pi/4$, π,...

b) Encuentre el valor del ángulo central del triángulo isósceles OAB, cuyo vértice es el centro de la circunferencia y que tiene la misma área que el sector circular cuyo ángulo central es α. Note que esto no es posible para valores arbitrarios del ángulo α. Para darse cuenta de ello basta pensar el caso $\alpha = \pi$.

c) Determine el máximo valor de α (en radianes) para el cual el triángulo isósceles descrito existe.

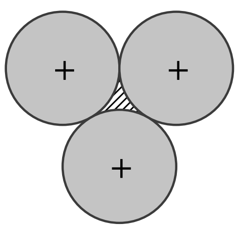
5. a) Si un hexágono regular y un triángulo equilátero tienen el mismo perímetro, determine la razón entre sus áreas.

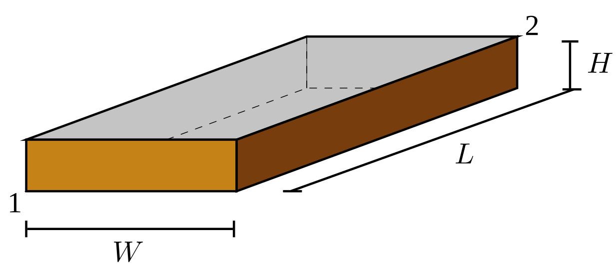


b) Dado un círculo de radio R, determine el área del hexágono regular circunscrito y el área del hexágono regular inscrito. Compare con el área de la circunferencia.

c) Se atreve a calcular este mismo caso cuando el polígono regular (inscrito y circunscrito) tienen $n = 12, 24,$ muchos lados...

6. Tres círculos de igual radio R se colocan tangentes entre sí como muestra la figura. Calcule el área achurada que se forma en el centro.





7. Un caracol requiere movilizarse en el menor tiempo posible desde el vértice 1 (inferior izquierdo) hasta el vértice 2 (superior derecho) de la caja rectangular de la figura. Los lados de esta caja son $L > W > H$. Como la rapidez (o lentitud) del caracol es constante, para minimizar su tiempo de viaje debe utilizar la trayectoria más corta entre estos dos puntos. Encuentre la trayectoria que debe seguir el caracol.

8. Suponga que la Tierra es una esfera de radio 6390 [km] y que sobre el Ecuador se tiende una cinta que la rodea. Suponga que alguien desea levantar esta cinta de manera que una persona de 2 m de alto pueda pasar justo bajo ella en cualquier lugar del Ecuador.

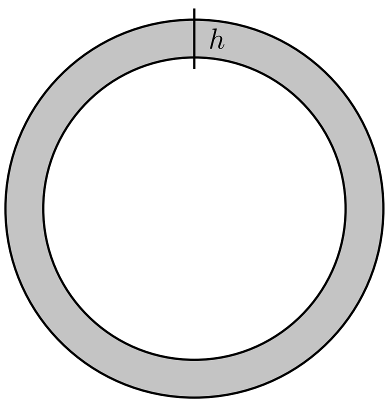
a) ¿En cuántos metros debe aumentarse el largo de la cinta?

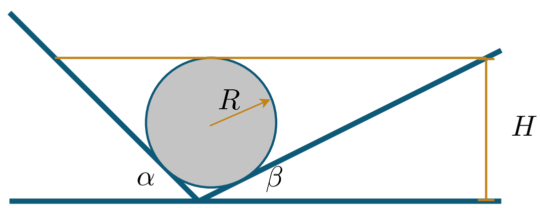
b) Muestre que en el caso de una circunferencia y un triángulo se cumple que el área extra que se añade es

$$\text{Área adicional } = \mathbf{P}\,\mathbf{h} + \pi h^2$$

donde P es el perímetro de la figura. Este resultado es válido para cualquier figura cóncava cuyo contorno se extiende en un valor h.

c) Suponga que, producto de la buena comida consumida en las fiestas de fin de año, debe acomodar su cinturón en el siguiente agujero. Calcule la superficie de tejido adiposo que agregó a su cuerpo a la altura de su cinturón.
Indicación: Para hacer este cálculo puede modelar su cintura como una circunferencia de perímetro P, donde P es la longitud medida desde uno de los extremos de su cinturón a la posición en que abrochaba su cinturón antes de las Fiestas. Puede suponer que el ancho del cinturón es W y que la distancia entre los agujeros es d.





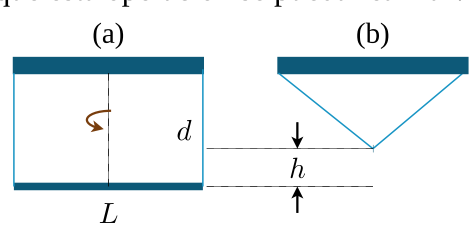
9. Una esfera de radio R se coloca en el fondo de una cuneta caracterizada por los ángulos α y β.

   Suponiendo que la esfera no se despega del fondo, determine el nivel necesario de agua H para sumergirla completamente. Verifique su resultado para el caso $\alpha = \beta$.

10. Una barra muy delgada de largo L cuelga del techo sostenida de sus extremos por sendos hilos de largo $\mathbf{d}$. Los hilos caen perpendicularmente a la barra.

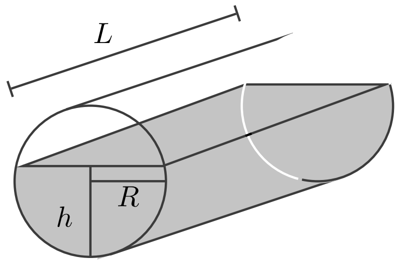
    a) Calcule la altura $\mathbf{h}$ que se eleva la barra al hacerla girar en $90°$.

    b) Usando materiales a su alcance, compruebe experimentalmente su resultado. ¿Qué condición debe cumplir $\mathbf{d}$ para que esta operación se pueda realizar?



11. Se tiene el cuadrado □ABCD de la figura junto con un triángulo equilátero △DEF, ambos de lado **a**. Se traza la diagonal AF, calcule el área del triángulo △GDH.

12. Un cilindro recostado de radio R y largo L contiene líquido hasta una altura h como indica la figura. Calcule la nueva altura del líquido cuando el cilindro se coloca en posición vertical.



13. Se tiene un conjunto de n cilindros de radio R alineados sobre una superficie plana y tocándose con sus vecinos. Los cilindros no pueden moverse. Utilizaremos una cuerda inextensible de largo L para colgar una masa m de uno de sus extremos, mientras el otro está conectado a una superficie vertical en un punto de altura $2R$ con respecto a la superficie horizontal, tal como lo indica la figura.

    Ahora suponga que usted instala $(n-1)$ cilindros idénticos sobre la base formada por los n cilindros, tal como se muestra en la figura. ¿Cuánto sube el extremo de la cuerda que tiene la masa m con respecto a la situación inicial?

    Indicación: Ud. puede resolver el problema como más le acomode, pero incluimos algunas indicaciones que pueden ser útiles:

    I) No se incomode con el dato de n o $(n-1)$ cilindros. En un comienzo sólo necesita ver qué sucede con tres cilindros solamente: uno arriba y dos abajo. Resuelva este caso primero y después extienda este resultado al de **n** cilindros.

    II) La cuerda no tiene espesor y va pegada a los cilindros en la zona ocupada por ellos.

    III) El orden es como sigue: la cuerda llega horizontal y tangente al primer cilindro (el de más a la izquierda), después sigue el arco de ese cilindro hasta el punto de contacto con el cilindro superior, desde allí se pega al superior hasta el siguiente punto de contacto con el inferior y así sucesivamente.

    IV) Debe evaluar el arco de circunferencia en cada caso para determinar el camino recorrido por la cuerda.