U. DE CHILE
INGENIERIA

Escuela de Ingeniería - Universidad de Chile

Escuela de Verano 2004

Matemáticas III

Propiedades Básicas de Conjuntos

Sean A, B y C subconjuntos de U (conjunto universo). Entonces se tiene:

1. $A \cup A = A$; $A \cap A = A$
2. $A \cup \emptyset = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $A \cup U = U$; $A \cap U = A$
4. Conmutatividad: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
5. Asociatividad: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
6. Distributividad: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
7. Leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$; $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
8. $A \setminus B = A \cap B^c$
9. $A \cup A^c = U$; $A \cap A^c = \emptyset$
10. $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$; $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$
11. $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$
12. $(A^c)^c = A$
13. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$; $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$; $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$
14. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

2 (2b 1 pa 1

NACHO

Control 1
Matematicas II

Profesores: H. Ramírez, P. P. Romagnoli, L. Sánchez y M. L. Varas

Enero 2005

1. Asuma que es verdadero que "todo lo que brilla es oro". Decida cuales de las siguientes aseveraciones se deducen de la hipótesis anterior. Justifique su respuesta.

   a) No todo lo que es de oro brilla. V o F

   b) Lo que no es de oro no brilla. ✓

   c) Si mis dientes brillan entonces son de oro. ✓

   d) Si mis dientes son de oro entonces brillan. ✗

   e) Si mis dientes no son de oro entonces no brillan. ✓

   f) Mis dientes son de oro si y solo si brillan. ✗

HACER AUX 4

2. Para $n \in \mathbb{N}$ se define la proposición $p(n) : n(n+1)$ es par.

   a) Determine el valor de verdad de

   $$\forall n \in \mathbb{N}\, p(n)$$ V ✓ caso 1 impar.

   y demuestre formalmente su afirmación.

   b) Para $n \in \mathbb{N}$ se define la proposición $q(n) : \frac{n(n+1)}{2}$ es un número entero. Demuestre que

   $$(\forall n \in \mathbb{N})(p(n) \Leftrightarrow q(n)).$$

Tomo n par y despues n impar.

HACER
Ack 4

3. Considere los conjuntos I, J, K definidos por

$$I = \{\{7,8\},\{2,3,4\},\{9,10\}\},$$
$$J = \{7,8,9,10,2,3,4\},$$
$$K = \{\{7\},\{8\},\{2\},\{3\},\{4\},\{9\},\{10\}\}.$$

Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si son verdaderas o falsas, justificando su respuesta.

a) $I = J = K$. F
b) $\{7,8\} \in I$. V
c) $\{7,8\} \subset I$. F
d) $\{7,8\} \in J$. F
e) $\{7,8\} \subset J$. V
f) $\{7,8\} \in K$. F
g) $\{7,8\} \subset K$ F
h) $\forall x \in J,\ \forall y \in J,\ \{x,y\} \in I$. F $\{7,9\}$ $\{3,2\}$
i) $\exists x \in J,\ \forall y \in J,\ \{x,y\} \in I$. F
j) $\exists x \in J,\ \exists y \in J,\ \{x,y\} \in I$. V $\{7,8\}$.
k) $\forall x \in J,\ \{x\} \in K$. V
l) $\forall x \in J,\ \exists A \in I,\ x \in A$. V muy bien

4. Sean A y B conjuntos contenidos en un mismo Universo. Demuestre que $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$.

Tiempo: 2:30 hrs.

Ignacio Riquelme

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2005
Matemáticas II

Control 1
Matematicas II

1. Sean a y b dos números reales. Definimos las proposiciones $p(a) =$ "a es un número racional" y $q(a,b) =$ "$a+b$ es número racional".

   Describa en palabras cada una de las proposiciones siguientes y demuestre que son verdaderas.

   a) $\forall a \in \mathbb{R},\ p(a) \Leftrightarrow p(-a)$ **{2.0 puntos}**
   b) $\forall a,b \in \mathbb{R},\ p(a) \wedge p(b) \Rightarrow q(a,b)$ **{2.0 puntos}**
   c) $\forall a,b \in \mathbb{R},\ p(a) \wedge \sim p(b) \Rightarrow \sim q(a,b)$ **{2.0 puntos}**

   Indicación: Recuerde que a es racional cuando $a = \frac{c}{d}$ en que $c, d \in \mathbb{Z}$ y $d \neq 0$.

2. Sean p, q y r 3 proposiciones. Para cada uno de los casos siguientes construya un circuito o una proposición con los conectivos lógicos vistos en clases que sea verdadera sólo cuando:

   a) Exactamente una de las 3 proposiciones p, q y r es verdadera. **{1.5 puntos}**
   b) Si una de las 3 proposiciones p, q y r es verdadera entonces alguna otra es falsa. **{1.5 puntos}**

   Determine si alguna de las dos implica la otra o si son equivalentes. **{3.0 puntos}**

   Indicación: Puede escribir la tabla de verdad para cada una de las proposiciones y no es necesario tener el circuito o la proposición para verificar la segunda parte.

3. Sean A, B, y C conjuntos arbitrarios. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.

   a) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \in C$. **{1.5 puntos}**
   b) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subsetneq C$. **{1.5 puntos}**
   c) Si $A \subsetneq B$ y $B \in C$, entonces $A \in C$. **{1.5 puntos}**
   d) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \subseteq C$. **{1.5 puntos}**

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2005
Matemáticas II

Control 1
Matematicas II

1. Sean a y b dos números reales. Definimos las proposiciones $p(a) =$"a es un número racional" y $q(a, b) =$"$a + b$ es número racional".

   Describa en palabras cada una de las proposiciones siguientes y demuestre que son verdaderas.

   (a) $\forall a \in \mathbb{R},\ p(a) \Leftrightarrow p(-a)$ {**2.0 puntos**}
   ($\Rightarrow$) Si $p(a)$ es cierto entonces $a = \frac{c}{d}$ con $c, d \in \mathbb{Z}$ y $d \neq 0$. Entonces $-a = \frac{-c}{d}$ con $-c, d \in \mathbb{Z}$ y $d \neq 0$ y por lo tanto $p(-a)$ es cierto.

   ($\Leftarrow$) (Manera corta) Usando lo anterior si $p(-a)$ es cierto entonces $p(-(-a)) = p(a)$ lo es también.

   Si no se repite el mismo argumento anterior reemplazando a por $-a$.

   (b) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ p(a) \wedge p(b) \Rightarrow q(a, b)$ {**2.0 puntos**}
   ($\Rightarrow$) Si $p(a)$ es cierto y $p(b)$ es cierto entonces $a = \frac{c}{d}$ y $b = \frac{e}{f}$ con $c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ y $d, f \neq 0$. Entonces $a + b = \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{c \cdot f + e \cdot d}{d \cdot f}$. En que $c \cdot f + e \cdot d \in \mathbb{Z}$ y además $d \cdot f \neq 0$ puesto que ambos no son 0. Esto prueba que $q(a, b)$ es cierto.

   (c) $\forall a, b \in \mathbb{R},\ p(a) \wedge \sim p(b) \Rightarrow \sim q(a, b)$ {**2.0 puntos**}
   Contradicción
   ($\Rightarrow$) (Por contradicción) Usando lo anterior. Si $p(a)$ es cierto y $q(a, b)$ es cierto. Entonces a es racional y $a + b$ es racional. Por la primera proposición entonces $-a$ es racional y por la segunda proposición $(a + b) - a = b$ es racional.

   Por lo tanto si suponemos que $p(a)$ es cierto y que $p(b)$ no lo es y además que $q(a, b)$ es cierto llegamos a una contradicción lo que prueba el resultado valga la redundancia por contradicción.

   (Otra manera) Supongamos que el resultado es falso, es decir $a + b$ es racional, queremos probar que la premisa debe ser falsa es decir $\sim p(a) \vee p(b)$ debe ser verdadera. Si $p(a)$ es falso no hay problema. Si

$p(a)$ es verdadero entonces $a+b$ es racional y a también razonando como antes se concluye que $p(b)$ es cierto.

2. Sean p, q y r 3 proposiciones. Para cada uno de los casos siguientes construya un circuito o una proposición con los conectivos lógicos vistos en clases que sea verdadera sólo cuando:

a) Exactamente una de las 3 proposiciones p, q y r es verdadera.{**1.5 puntos**}

b) Si una de las 3 proposiciones p,q y r es verdadera entonces alguna otra es falsa.{**1.5 puntos**}

Determine si alguna de las dos implica la otra o si son equivalentes.{**3.0 puntos**}

Las tablas de verdad correspondientes son las siguientes:

p	q	r	a	b	a⇒ b	b⇒ a
V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	F	V	V	F
V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F

De la tabla es claro que (b) implica (a) puesto que cuando (b) es verdadera (a) siempre resulta verdadera. Del mismo modo no es cierto que (a) implica (b) puesto que hay casos donde (a) es cierta y (b) no lo es.

Es posible también agregar las proposiciones a⇒b y b⇒a para verificar esto.

Para construir (a). Es una expresión que es cierta en sólo 3 casos.

Cuando sólo p es verdadera es decir: $p \wedge (\sim q) \wedge (\sim r)$.
Cuando sólo q es verdadera es decir: $(\sim p) \wedge q \wedge (\sim r)$.
Cuando sólo r es verdadera es decir: $(\sim p) \wedge (\sim q) \wedge r$.
Por lo tanto (a) se escribe como:

$$(p \wedge (\sim q) \wedge (\sim r)) \vee ((\sim p) \wedge q \wedge (\sim r)) \vee ((\sim p) \wedge (\sim q) \wedge r).$$

Para construir (b). Esto es un implica y por ende sólo será falso cuando la premisa sea cierta y el resultado falso. Es decir queremos una proposición que sea falsa sólo cuando haya alguna proposición verdadera y ninguna falsa. Como $p \wedge q \wedge r$ es la proposición que es verdadera cuando ocurre exactamente eso, es decir hay proposiciones verdaderas pero ninguna falsa (b) se escribe como:

$$\sim (p \wedge q \wedge r) \text{ o bien } (\sim p) \vee (\sim q) \vee (\sim r).$$

3. Sean A, B, y C conjuntos arbitrarios. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.

   Para esta parte la mitad del puntaje corresponde a si es verdadero o falso y la otra mitad a si la justificación es correcta.

   a) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \in C$.**{1.5 puntos}**
   Verdadero. Puesto que si $B \subseteq C$ por definición de inclusión $A \in B$ implica $A \in C$.

   b) Si $A \in B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.**{1.5 puntos}**
   Falso. Sea $A = \{1\}$, $B = C = \{\{1\}\}$. Entonces $A \in B$ y claramente $B \subseteq C$ pero $A \subsetneq B = C$.

   c) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \in C$.**{1.5 puntos}**
   Falso. Sea $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{\{1, 2\}\}$. Entonces $A \subseteq B$ y $B \in C$ pero $A \notin C$.

   d) Si $A \subseteq B$ y $B \in C$, entonces $A \subseteq C$.**{1.5 puntos}**
   Falso. Sea $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{\{1, 2\}\}$. Entonces $A \subseteq B$ y $B \in C$ pero $A \nsubseteq C$.

$\{1\} \in \{\{1\}\} \subseteq \{\{1\}, 1\}$.

ESCUELA DE VERANO - MATEMÁTICAS II - Enero 2009

Profesores: Raúl URIBE, Pierre Paul ROMAGNOLI,
Leonardo SÁNCHEZ, José ZAMORA

Ejercicio # 1

Problema 1.- En un pueblo de 30.000 habitantes se leen tres periódicos (la Primera, la Segunda y la Tercera). Se sabe que 6.500 personas leen la Primera, 5.580 la Segunda y 4.800 la Tercera. Además, los que leen la Primera y la Segunda, pero no la Tercera son 680; los que leen la Primera y la Tercera, pero no la Segunda son 1200; y los que leen la Segunda y la Tercera, pero no la Primera son 880. Si los que no leen ningún periódico son 16.720, ¿Cuántos leen los tres periódicos? Justifique rigurosamente su respuesta.

Tiempo: 30 minutos.

NACHO

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2007
Matemáticas II

Control N°1

1. Un hombre está mirando un retrato de una persona. Al preguntarle de quien es el retrato que mira, este responde "No tengo ni hermanos ni hermanas y el padre de la persona en la foto es hijo de mi padre".

   a) Escriba la respuesta del hombre usando lógica. Se le sugiere que use la proposición $q(x,y) =$"x es hijo de y" y utilice las personas mencionadas en el enunciado y sus padres.

   b) Establezca una relación de parentesco entre el hombre que mira el retrato y la persona del retrato y demuéstrela.

2. Sea $p(x)$="$x \notin \mathbb{Q}$" y $q(x)$="$x^2 \notin \mathbb{Q}$. Determine y justifique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   a) $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) \Rightarrow q(x)$

   b) $\forall x \in \mathbb{R} : q(x) \Rightarrow p(x)$

   c) $\forall x \in \mathbb{Q} : p(x) \Rightarrow q(x)$

3. Dados a,b,c y d números reales se definen los conjuntos $A = \{a, \{a, b\}\}$ y $B = \{c, \{c, d\}\}$. Demuestre que $A = B$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.

4. Dados dos conjuntos A y B pruebe que $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2007
Matemáticas II

Control N°1

1. Sea a a la persona que ve el retrato, b la persona del retrato y además c el padre de a y d el padre de b. Sea $q(x, y) =$"x es hijo de y".

   a) Lo primero que dice la frase es que para cualquier x se tiene que $q(x, c) \Rightarrow x = a$.

   Lo segundo que dice la frase es que $q(d, c)$ es V.

   b) Usando lo anterior se tiene que si $q(d, c)$ es V se tiene que $d = a$ y entonces a es padre de b.

2. Sea $p(x)$="$x \notin \mathbb{Q}$" y $q(x)$="$x^2 \notin \mathbb{Q}$.

   a) $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) \Rightarrow q(x)$. Es F puesto que $p(\sqrt{2})$ es V y $q(\sqrt{2})$ es F.

   b) $\forall x \in \mathbb{R} : q(x) \Rightarrow p(x)$. Es V si $\neg p(x)$ es decir $x \in \mathbb{Q}$ se tiene que $x \cdot x = x^2 \in \mathbb{Q}$ que prueba $\neg q(x)$.

   c) $\forall x \in \mathbb{Q} : p(x) \Rightarrow q(x)$. Es V puesto que dado $x \in \mathbb{Q}$ se tiene que $p(x)$ es F y por tanto $p(x) \Rightarrow q(x)$ es V.

3. Dados a,b,c y d números reales se definen los conjuntos $A = \{a, \{a, b\}\}$ y $B = \{c, \{c, d\}\}$. Demuestre que $A = B$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.

   Por simple inspección es claro que si $a = c$ y $b = d$ se tiene que $A = B$.

   Si suponemos que $A = B$ entonces tenemos que $a \in B$ y que $\{a, b\} \in B$. Por otro lado los elementos de B son c y $\{c, d\}$.

   Como a no puede ser igual a $\{c, d\}$ (uno es número el otro conjunto) entonces $a = c$ y además $\{a, b\} = \{c, d\}$.

   Pero sabemos que $\{c, d\} = \{a, d\}$ por lo tanto $\{a, b\} = \{a, d\}$.

Ahora hay que considerar dos casos:

- Si $b \neq a$ entonces necesariamente $b = d$.
- Si $b = a$ entonces necesariamente $d = a$ y por tanto $b = d$.

4. Dados dos conjuntos A y B pruebe que $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$. $\Leftarrow$ ¡ FACIL !

   Si $A = B$ entonces $A \cup B = A \cup A = A$ y $A \cap B = B \cap B = B$ y por tanto $A \cup B = A = B = A \cap B$.

   Supongamos que $A \neq B$ esto quiere decir que existe $x \in A$ tal que $x \notin B$ o bien existe $x \in B$ tal que $x \notin A$.

   En cualquiera de los dos casos se tiene que $x \notin A \cap B$ y $x \in A \cup B$ y por tanto $A \cap B \neq A \cup B$.

   CONTRADICCIÓN

   $x \in A \wedge x \notin B$.

   $\Rightarrow$ $x \notin (A \cap B)$

Escuela de Ingeniería - Universidad de Chile

Escuela de Verano 2004

Matemáticas III

Propiedades Básicas de Conjuntos

Sean A, B y C subconjuntos de U (conjunto universo). Entonces se tiene:

1. $A \cup A = A$; $\quad A \cap A = A$
2. $A \cup \varnothing = A$; $\quad A \cap \varnothing = \varnothing$
3. $A \cup U = U$; $\quad A \cap U = A$
4. Conmutatividad: $A \cup B = B \cup A$; $\quad A \cap B = B \cap A$
5. Asociatividad: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
6. Distributividad: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
7. Leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$; $\quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
8. $A \backslash B = A \cap B^c$
9. $A \cup A^c = U$; $\quad A \cap A^c = \varnothing$
10. $A \subseteq A \cup B$; $\quad B \subseteq A \cup B$; $\quad A \cap B \subseteq A$; $\quad A \cap B \subseteq B$
11. $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$
12. $(A^c)^c = A$
13. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$; $\quad A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$; $\quad A \subseteq B \Leftrightarrow A \backslash B = \varnothing$
14. $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$