

---

## ESCUELA DE VERANO 2010 - MATEMÁTICAS II

---

**Profesores:** Raúl Uribe, Pierre Paul Romagnoli, Leonardo Sánchez, José Zamora.

### GUÍA # 1 :Lógica, Conjuntos e Inducción

#### Lógica y Conjuntos.

**P1.-** Construya las Tablas de Verdad de las siguientes proposiciones:

- $p \wedge (q \vee r)$
- $(p \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q)$
- $[p \vee (\bar{q} \wedge \bar{r})] \vee [(q \wedge \bar{p}) \vee (r \wedge \bar{q})]$
- $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow (p \vee \bar{q})$

**P2.-** Si  $p \Leftrightarrow V$  y  $q \Leftrightarrow r \Leftrightarrow F$  encuentre el valor de verdad de:

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\bar{p} \wedge q)] \wedge (r \Rightarrow q)$$

**P3.-** Sean  $p, q, r$  proposiciones tales que:  $p \Leftrightarrow V, q \Leftrightarrow F$  y  $r$  es una proposición cualquiera. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- $(p \wedge q) \vee q$
- $(p \vee q) \wedge q$
- $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
- $(q \vee r) \Rightarrow (\bar{p} \vee \bar{r})$

**P4.-** Si  $p \Leftrightarrow V$  y  $q \Leftrightarrow F$ , determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$\overline{[p \vee (\bar{p} \wedge q) \wedge q]} \Rightarrow [(\bar{q} \vee r) \Rightarrow (q \Rightarrow s)]$$

**P5.-** Pruebe que las siguientes proposiciones son tautologías:

- $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge r)]$
- $[(p \vee r) \Rightarrow q] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- $(p \wedge q) \Rightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$
- $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$

**P6.-** Determine si las siguientes proposiciones son o no Tautologías.

- $p \Rightarrow (p \vee q)$
- $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \bar{q})$
- $p \Rightarrow (p \wedge q)$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

**P7.-** Muestre que:

- $[p \wedge (q \wedge \bar{p})] \Leftrightarrow V$
- $[(p \wedge q) \vee p] \Leftrightarrow p$
- $[(p \Rightarrow q) \vee \bar{p}] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
- $\{[p \vee (q \Leftrightarrow \bar{p})] \Rightarrow \bar{q}\} \Leftrightarrow \bar{q}$

P8.- Pruebe que:

$$[p \vee (\bar{p} \wedge q)] \Leftrightarrow (p \vee q)$$

P9.- Demostrar las siguientes equivalencias:

- $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r$
- $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$
- $p \Rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
- $(p \wedge q) \Rightarrow r \Leftrightarrow (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$
- $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow s)] \vee [(r \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Leftrightarrow (p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)$

P10.- Se definen los siguientes conectivos lógicos  $\nabla$  y  $\Delta$  de la manera siguiente:  $p \nabla q \Leftrightarrow (\bar{p} \wedge \bar{q})$   
 $p \Delta q \Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$ . Demostrar que:

- $\bar{p} \Leftrightarrow (p \nabla p)$
- $(p \wedge q) \Leftrightarrow \overline{(p \Delta q)}$

P11.- Se define el conectivo lógico  $\oplus$  como:  $p \oplus q \Leftrightarrow F$  solamente si  $p \Leftrightarrow F$  y  $q \Leftrightarrow F$ ; para cualquier otros valor de p y q  $p \oplus q \Leftrightarrow V$ . Determine si la siguiente proposición es una Tautología o no:

$$[(p \Rightarrow q) \vee q] \Leftrightarrow [(p \wedge \bar{q}) \oplus \bar{q}]$$

P12.- Se define el conectivo lógico binario  $\star$  por la siguiente tabla:

| p | q | p $\star$ q |
|---|---|-------------|
| V | V | F           |
| V | F | F           |
| F | V | F           |
| F | F | V           |

Muestre lo siguiente:

- $\bar{p} \Leftrightarrow p \star p$
- $p \vee q \Leftrightarrow (p \star q) \star (p \star q)$
- $p \wedge q \Leftrightarrow (p \star p) \star (q \star q)$
- $p \star q \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \wedge (p \wedge q)]$

P13.- Sea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Escribir en simbolos matemáticos y averiguar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- Hay un elemento en A que es mayor que los restantes.
- Existe un único en A elemento cuyo cuadrado es 4.
- Para cada elemento en A existe otro en A que es menor o igual que él.
- Existe un elemento cuyo cuadrado es igual a sí mismo.

P14.- Indique en cuál de los siguientes casos p es condición necesaria y suficiente para q, ie  $p \Leftrightarrow q$ .

- p: n es múltiplo de 4; q: n es número par.
- p: n y m son números pares; q:  $n + m$  es un número par.
- p:  $n^2$  es par; q: n es par.

P15.- Pruebe que  $a \cdot b$  es par  $\Leftrightarrow (a$  es par  $\vee b$  es par).

P16.- Demuestre por contradicción la siguiente proposición: "Los 123 residentes de un edificio tienen edades que suman 3813 años, entonces existen 100 de ellos cuyas edades suman al menos 3100 años".

P17.- Demuestre por contradicción que  $\sqrt{2}$  no es un número racional.

P18.- Dada la siguiente proposición: " $\exists n \in \mathbb{N} : (n \leq 1 \Rightarrow n^2 \geq 4n)$ ". Determine su valor de verdad, luego escriba la proposición negada.

P19.- Negar las siguientes proposiciones:

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$
- $\exists x \in \mathbb{R} : e < x < \pi$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x < y$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (x + y = 1 \Rightarrow x = -y)$ .
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : [(x + y) \text{ es par} \Rightarrow (x \text{ es par} \wedge y \text{ es par})]$
- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : (x < y \wedge x^2 \geq y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} : (x < y \Rightarrow x + z = y)$

P20.- Niegue las siguientes proposiciones:

- $\forall m \in \mathbb{Z} : (2m + 1 > 2 \wedge m - 4 \leq 1)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (3x + y) \text{ es par}$
- $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z} : (2x + y = 5 \Rightarrow x \cdot y < 2)$
- $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N} : [(n \cdot m > 2) \Leftrightarrow (2n + m \geq 1)]$

P21.- Considere las funciones proposicionales

$$p(x, y) : x - y > 1 \quad y \quad q(x, y) : 2x + 3y < 2$$

así como los conjuntos  $A = \{2, 1, -1, -3\}$  y  $B = \{-4, 1, -1/2\}$ . Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- $\exists x \in A, \forall y \in B : \overline{p(x, y)} \Rightarrow q(x, y)$
- $\forall x \in B, \forall y \in A : \overline{p(x, y)} \vee \overline{q(x, y)}$
- $\exists x \in A, \exists y \in B : p(x, y) \Leftrightarrow \overline{q(x, y)}$
- $\forall x \in A, \exists y \in B : p(x, y) \wedge q(x, y)$
- $\forall x \in B, \exists y \in B : q(x, y)$
- $\forall x \in B, \exists y \in A : q(x, y) \Rightarrow p(x, y)$

P22.- Dadas las funciones proposicionales

$$p(x) : x \text{ es par,}$$

$$q(x) : x \text{ es múltiplo de 5,}$$

$$r(x) : x \geq 8.$$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- $\forall x \in \mathbb{N} : (p(x) \vee r(x))$
- $\forall x \in \mathbb{N} : (\overline{p(x)} \wedge q(x))$
- $\exists n \in \mathbb{N} : (r(n) \Rightarrow q(n))$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} : [p(n) \Rightarrow (q(n) \vee r(m))]$

P23.- Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Demuestre que:

- $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < 1$
- $0 < a < 1 \Rightarrow a^2 < a$
- $a \geq 1 \Rightarrow a^2 \geq 1$
- $a \geq 1 \Rightarrow a^2 \geq a$

P24.- Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  Muestre que:

- $(a > 0 \wedge b > 0 \wedge a + b = 1) \Rightarrow (a \cdot b \leq \frac{1}{4})$
- $(a > 0 \wedge b > 0 \wedge a + b = 1) \Rightarrow (a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2})$
- $2a + 4b = 1 \Rightarrow (a^2 + b^2 \geq \frac{1}{20})$
- $(a > 0 \wedge b > 0) \Rightarrow (\sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2})$
- $(a > 0 \wedge b > 0) \Rightarrow (\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}) \cdot (a + b) \geq 4$

**P25.-** Pruebe que si  $2p = a + b + c$  entonces:

$$1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2p(p - a)}{bc}$$

**P26.-** Dados los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| < 1\}$$

y

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x + 2| + 3}{|x|} < 23\}$$

Demuestre que la proposición

$$\forall x \in \mathbb{R} (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

es verdadera.

**P27.-** Dados

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |3x - 4| < 1\}$$

y

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |\frac{x + 2}{x} - 5| < \varepsilon\}$$

Determine  $\varepsilon$  de modo que  $A \subseteq B$ .

**P28.-** Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique brevemente su respuesta.

- $\emptyset \subseteq \emptyset$
- $\emptyset \in \emptyset$
- $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$
- $\{\emptyset\} \in \emptyset$
- $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$
- $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
- $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}\}$
- $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$
- $\{a, \emptyset\} \in \{a, \{a, \emptyset\}\}$
- $\{a, \emptyset\} \subseteq \{a, \{a, \emptyset\}\}$

**P29.-** Sean  $A$ ,  $B$ , y  $C$  conjuntos arbitrarios. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Justifique su respuesta.

- Si  $A \in B$  y  $B \subseteq C$ , entonces  $A \in C$ .
- Si  $A \in B$  y  $B \subseteq C$ , entonces  $A \subseteq C$ .
- Si  $A \subseteq B$  y  $B \in C$ , entonces  $A \in C$ .

d. Si  $A \subseteq B$  y  $B \in C$ , entonces  $A \subseteq C$ .

**P30.-** Si  $A$ ,  $B$ , y  $C$  son conjuntos tales que  $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$  y  $(A \cap C^c) \subseteq (B \cap C^c)$ . Demuestre que  $A \subseteq B$ .

**P31.-** Sean  $A$ , y  $B$  conjuntos. Discuta la validez (o no) de las siguientes afirmaciones:

- $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$ .
- $A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A$ .
- $A \Delta B = A \Rightarrow B = \emptyset$ .
- $A \cap B = A \cup B \Rightarrow A = B$ .

**P32.-** Sean  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  conjuntos.

- Si  $A \subseteq B$  y  $C \subseteq D$  ¿es cierto siempre que  $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$ ? ¿y que  $(A \cap C) \subseteq (B \cap D)$ ?
- Si  $A \subset B$  y  $C \subset D$  ¿es cierto siempre que  $(A \cup C) \subset (B \cup D)$ ? ¿y que  $(A \cap C) \subset (B \cap D)$ ?

**P33.-** Responda a las siguientes preguntas:

- Si  $A \cup B = A \cup C$ , ¿es necesario que  $B = C$ ?
- Si  $A \cap B = A \cap C$ , ¿es necesario que  $B = C$ ?
- Si  $A \Delta B = A \Delta C$ , ¿es necesario que  $B = C$ ?

**P34.-** Definamos los siguientes conjuntos:

$A = \{ \text{Estudiantes de Matemáticas I} \}$      $E = \{ \text{Estudiantes de Física II} \}$   
 $B = \{ \text{Estudiantes de Matemáticas II} \}$      $F = \{ \text{Estudiantes que fueron a Fantasilandia} \}$   
 $C = \{ \text{Estudiantes De Computación} \}$      $G = \{ \text{Estudiantes que se acostaron muy tarde} \}$   
 $D = \{ \text{Estudiantes de Física I} \}$

Expresar las siguientes proposiciones en función de los conjuntos anteriormente definidos:

- Todos los alumnos de Matemáticas I cursan Física I.
- Los estudiantes de Matemáticas II o los de Física II se acostaron tarde.
- Sólo los estudiantes de Matemáticas II o los de Física II se acostaron tarde.
- Ningún estudiante de Computación fue a Fantasilandia.
- A Fantasilandia fueron sólo estudiantes de Matemáticas I y Física I.
- Todos los estudiantes de Física I que no son ni de Matemáticas I ni de Matemáticas II fueron a Fantasilandia.

**P35.-** Se sabe que de un grupo de 20 personas, 10 estudian Música, 7 estudian Fotografía, 4 estudian Pintura y Fotografía, 3 estudian Música y Pintura, 2 estudian Fotografía y Música y 1 estudia Música, Fotografía y Pintura. ¿Cuántos estudian sólo Fotografía? ¿Cuántos estudian sólo Pintura?

**P36.-** Demostrar las siguientes propiedades del complemento y la diferencia:

- $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \setminus B = \emptyset$

**P37.-** Sean  $A$ ,  $B$ , y  $C$  conjuntos arbitrarios. Demuestre las siguientes propiedades:

- $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cap C)$ .
- $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$ .
- $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ .

**P38.-** Sea  $U$  un conjunto universo que contiene a  $A$ ,  $B$ , y  $C$  (como subconjuntos, no como elementos!!!). Demuestre que:

- $(A \cup B) \cup (A^c \cap B^c) = U$
- $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$
- $A \setminus (B \setminus C) = A \cap (B^c \cup C)$
- $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$

**P39.-** Pruebe que:

- $A \subset B \Rightarrow \{A \cup (B \setminus A)\} = B$
- $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$

**P40.-** Demuestre las siguientes propiedades:

- $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$
- $A \cap (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cap C)$
- $A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \emptyset$
- $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \Delta B = A \cup B$

**P41.-** Probar que si

$$A \cap X = A \cap Y \wedge A \cup X = A \cup Y$$

entonces  $X = Y$ .

**Sumatorias e Inducción.** En esta sección se pedirá expresar todas las sumas que aparezcan como sumatorias. Ej:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i$$

**P1.-** Demostrar que:

- $n^2 + n$  es divisible por 2.
- $n^3 + 2n$  es divisible por 3.
- $n^2 - n + 2$  es divisible por 2.
- $(a - b)$  es factor de  $a^n - b^n$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$ .
- $(a + b)$  es factor de  $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq b$ .

**P2.-** Demostrar que todo número natural  $n \geq 24$  se puede expresar como la suma de cinco y siete.

**P3.-** Demostrar que para cada  $n \geq 0$  el número  $4^{2n+1} + 3^{n+2}$  es múltiplo de 13

**P4.-** Escriba las sumas como sumatorias y demuestre por inducción lo siguiente:

- $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ .
- $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ .
- $1 * 3 + 2 * 4 + 3 * 5 + \dots + n(n + 2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$ .
- $\frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \frac{1}{3*4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ .
- $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ .
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$

**P5.-** En cada uno de los siguientes casos escriba las sumas como sumatorias y demuestre, usando inducción, que el enunciado es verdadero para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

- $2^n > n$ .
- $3 + 4 + 5 + \dots + (n + 2) = \frac{n(n+5)}{2}$ .
- $2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n+1)}{2}$ .

- d.  $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3}$ .
- e.  $1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$ , donde  $r$  es una constante distinta de 1.
- f.  $1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = n(2n - 1)$ .
- g.  $3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1) = n(n + 2)$ .
- h.  $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$ .
- i.  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ .
- j.  $4 + 3 + 2 + \dots + (5 - n) = \frac{n(9-n)}{2}$ .
- k.  $-2 - 3 - 4 - \dots - (n + 1) = -\frac{n(n+3)}{2}$ .
- l.  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ .
- m.  $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots + (2n - 1) \cdot 2n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$ .
- n.  $\frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} + \frac{1}{(n+2) \cdot (n+3)} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} = \frac{1}{2n}$ .
- ñ.  $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ .  $a$  y  $r$  son constantes,  $r \neq 1$ .

**P6.-** Para  $n \in \mathbb{N}$ , probar que  $n - 2 < \frac{n^2 - n}{12}$

**P7.-** Sea  $P(n)$  la proposición para  $n \in \mathbb{N}$ :  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \frac{(n+1)^2}{2}$   
 Demostrar que la veracidad de  $P(k)$  implica la veracidad de  $P(k+1)$  para todo  $k \geq 1$ .  
 ¿Es verdadera  $P(n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ?

**P8.-** Probar que la suma de los ángulos internos de un polígono convexo de  $n$  lados es  $(n-2) \cdot 180$  grados.

**P9.-** Muestre que para  
 $q(n) : n^2 - n + 41$  es un número primo,  
 $q(1)$  es verdadera pero  $q(n) \Rightarrow q(n - 1)$  es falso.

**P10.-** Muestre que para  
 $q(n) : 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = (n^2 + n + 2)$   
 $q(n) \Rightarrow q(n + 1)$  pero que  $q(1)$  es falso.

**P11.-** A la edad de un año, una pareja (macho y hembra) de comadreja da origen a dos nuevas parejas de comadreas y en cada año posterior produce 6 nuevas parejas de comadreas. Suponga que las comadreas no mueren y que se comienza con un par de comadreas recién nacidas, es decir  $a_0 = 1$ .

- Determine una relación de recurrencia para  $a_n$ , la cantidad de comadreas al final del año  $n$ .
- Demuestre por inducción que:

$$a_n = \frac{1}{5} [4^{n+1} - (-1)^{n+1}]$$

**P12.-** Sea  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \frac{6a_n^2}{a_n^2 + 8}$ , para  $n \in \mathbb{N}$ . Demuestre que  $a_n \leq 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**P13.-** Supongamos que Ud. recibe una carta de una "cadena", con la lista de los nombres y direcciones de 6 personas. La carta le pide que envíe \$1000 a la persona que encabeza la lista. Además, Ud. debe hacer una nueva carta casi idéntica a la recibida, los únicos cambios son suprimir en la lista de nombres el primero de ellos y agregar al final de la lista el nombre suyo al final. Esta carta reformada tiene que enviarla a cinco amigos suyos, distintos de los que aparecen en la carta reformada. La carta original promete a Ud. que recibirá dentro de pocas semanas la cantidad de \$15.625.000.

Aunque estas "cadenas" nunca funcionan Ud. podría encontrar entretenido verificar si la promesa de la carta original es correcta, bajo el supuesto que Ud. y todos los receptores de las cartas siguieran las instrucciones, es decir, no "rompieran la cadena".

Podemos llamar  $c_k$  a la cantidad de cartas en el eslabón  $k$ , siendo la carta que Ud. recibió

el eslabón 0, es decir  $c_0 = 1$ . Las cartas que Ud. envía corresponden al primer eslabón, así  $c_1 = 5$ , la cantidad de cartas enviadas por sus amigos es  $c_2$ , etc.

- ¿Cuál es la relación entre  $c_k$  y  $c_{k+1}$ ?
- Verifique por inducción que  $c_k = 5^k$ .
- ¿De que eslabón son los receptores de cartas que deberían enviar a Ud. \$1000 cada uno?

**P14.-** En una hoja de papel se tiene  $n$  rectas distintas dibujadas de borde a borde, de modo que todo par de rectas tiene un punto en común (que no está en el borde de la hoja) y no hay tres (o más) que concurran en un mismo punto.

- Si  $a_k$  es la cantidad de regiones en que queda dividida la hoja al tener  $k$  rectas. ¿qué relación hay entre  $a_k$  y  $a_{k+1}$ ?
- Determine  $a_n$  en términos de  $n$ , sin referencia a  $a_{n-1}$ .

**P15.-** Una "Torre de Hanoi" es un juego consistente de  $n$  anillos de distintos tamaños y tres estacas verticales fijas en un tablero A, B, C, alineadas de izquierda a derecha, en las que se colocan los anillos. Al iniciar el juego todos los anillos están en la estaca A, apilados de mayor a menor, el más grande en la base, es decir, formando una pila cónica. El juego consiste en trasladar los anillos a la estaca C, para obtener una pila igual a la original. La complicación es que cada vez se puede mover un solo anillo para ubicarlo en otra estaca y si en esta hay otros anillos ellos deben ser de menor diámetro, es decir, en cada etapa del juego en cada estaca debe haber una pila cónica.

- Determine una recurrencia para  $a_n$ , el número mínimo de movimientos para lograr el objetivo.
- Conjeture una fórmula para  $a_n$  y demuéstrela por inducción.

La observación clave es que para mover el anillo más grande desde A hasta C, debemos primero mover los  $(n - 1)$  anillos restantes desde A a B y luego desde B a C.

**P16.-**  $S_n$  es un conjunto formado por  $n$  números distintos. Se trata de obtener una relación de recurrencia para  $a_n$ , la cantidad de comparaciones entre pares de números que están en  $S_n$ , para determinar el mayor de todos ellos. Es claro que  $a_1 = 0$  y  $a_2 = 1$ . En el caso general se propone el siguiente algoritmo (procedimiento). Si  $n$  es par, podemos calcular  $M_1$ , el mayor de los números en la primera mitad de  $S_n$ ; después calculamos  $M_2$ , el mayor de los números en la segunda mitad de  $S_n$ ; finalmente, hacemos las comparaciones entre  $M_1$  y  $M_2$ , para así obtener el mayor elemento de  $S_n$ . Si  $n$  es impar, separamos  $S_n$  en un número aislado cualquiera y 2 mitades iguales del resto. En estas 2 mitades elegimos  $M_1$  y  $M_2$  como en el caso anterior y comparamos el mayor de ambos con el número aislado separado antes, para así obtener el mayor número de  $S_n$ .

- Encuentre  $a_n$  para  $n$  par y para  $n$  impar.
- Considere un algoritmo que recorra  $S_n$  de manera ordenada y que compare cada elemento nuevo con el mayor de los anteriores. Encuentre el número de comparaciones  $b_n$  que se realizaría con este algoritmo y compárelo con  $a_n$ .
- Adapte ambos algoritmos al caso de tener que obtener el mayor y el menor número de  $S_n$  y compare su eficiencia, en cuanto al número de comparaciones que realiza cada uno.

**P17.-** Una persona debe subir una escala de  $n$  peldaños, cada paso de ella puede abarcar un peldaño o dos peldaños. Se trata de establecer una relación de recurrencia para  $a_n$  la cantidad de maneras distintas de ascender la escala de  $n$  peldaños. Es fácil ver que  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$  y  $a_3 = 3$ . Note que para calcular  $a_4$  podemos razonar así: si el primer paso abarca un peldaño, el resto del recorrido (3 peldaños) se puede hacer de  $a_3$  maneras; si el primer

paso abarca 2 peldaños, el resto del ascenso (2 peldaños) se puede hacer de  $a_2$  maneras, luego  $a_4 = a_3 + a_2$ .

- Expresar  $a_n$  en términos de  $a_{n-1}$  y  $a_{n-2}$  para  $n \geq 3$ .
- Demuestre por inducción que:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

**P18.-** Probar las siguientes identidades:

- $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$
- $n \binom{n-1}{k} = (n-k) \binom{n}{k}$
- $\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$
- $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{3}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

**P19.-** Determinar el valor de  $n$  si  $\frac{\binom{n}{4}}{\binom{n+1}{3}} = \frac{5}{6}$

**P20.-** Calcular el término central de  $(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}x^{-2})^6$

**P21.-** En el desarrollo de  $(x^2 + \frac{1}{x})^{18}$  encuentre:

- El término constante.
- El término central.
- El valor del coeficiente de  $x^6$ .

**P22.-** Utilice el teorema del binomio para demostrar que:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0$$

**P23.-** Sean  $p$  y  $q$  dos reales no negativos tal que  $p + q = 1$ . Calcule

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} k^2$$