Problema

1. Probar por inducción que para $n \geq 1$,

$$2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$$

Es divisible por 24.

Solución:

<u>Caso Base, n=1</u> $2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 5^1 - 5 = 14 + 15 - 5 = 24$ que es divisible por 24.

Ahora probamos que:

Si $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ es divisible por 24 (Hipótesis de Inducción), entonces

$2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5$ También lo es.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 &= 2 \cdot 7 \cdot 7^n + 3 \cdot 5 \cdot 5^n - 5 \\ &= 14 \cdot 7^n + 15 \cdot 5^n - 5 \\ &= 12 \cdot 7^n + 12 \cdot 5^n + (2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5) \\ \text{Por hipótesis de inducción} \quad &= 12 \cdot (7^n + 5^n) + 24K \end{aligned}$$

Ahora solo nos falta probar que $(7^n + 5^n)$ es par (que sea divisible por 2, o que $(7^n + 5^n) = 2k$, k entero), para que en conjunto el primer término sea divisible por 24.

- Por demostrar que: $(7^n + 5^n)$ es par

Por inducción:

n=1 => 7+5 =12 Es par.

Ahora asumimos que $(7^n + 5^n)$ es par y probaremos que $(7^{n+1} + 5^{n+1})$ es par.

$$\begin{aligned} 7^{n+1} + 5^{n+1} &= 7 \cdot 7^n + 5 \cdot 5^n \\ &= (5 + 2) \cdot 7^n + 5 \cdot 5^n \\ &= 5 \cdot 7^n + 2 \cdot 7^n + 5 \cdot 5^n \\ &= 5 \cdot (7^n + 5^n) + 2 \cdot 7^n \\ \text{Por hipótesis de inducción} \quad &= 5 \cdot 2k + 2 \cdot 7^n \\ &= 2(5k + 7^n) = 2k^* \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(7^n + 5^n)$ es par para todo $n \geq 1$, luego

$$7^{n+1} + 5^{n+1} = 12 \cdot (7^n + 5^n) + 24k = 12 \cdot 2k^* + 24k = 24(k^* + k) = 24K \blacksquare$$

Por lo tanto, hemos probado que $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5$ es divisible por 24 para $n \geq 1$