

Clase 6: Inducción

Lunes 11 de Enero

P1.- Demuestre por inducción las siguientes propiedades:

1. $3^{2n} + 7$ es múltiplo de 8
2. $5^{2n} + (-1)^{n+1}$ es múltiplo de 13
3. $\sum_{i=1}^n i * i! = (n+1)! - 1$
4. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}$
5. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}$
6. $n^3 < 2^n$

P2.- Calcule las siguientes sumatorias

1. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$
2. $\sum_{i=1}^n \frac{k+1}{k+2!}$

0.1. Respuestas

P1.- 1.-

Caso Base (n=0)

$$3^{2*0} + 1 = 8 = 8k, \quad k = 0$$

Paso inductivo

$$pdq : 3^{2n} + 7 = 8k \Rightarrow 3^{2(n+1)} + 7 = 8k'$$

$$3^{2(n+1)} + 7 = 9 * 3^{2n} + 7$$

4.- Caso base.

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1 < 2 < 2\sqrt{1}$$

Paso inductivo

$$pdq. - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n} \geq 0 \Rightarrow - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} \geq 0$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} \\ &= - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{2n+1}{\sqrt{n+1}} \quad \text{por anexo} \\ &\geq - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Anexo

$$pdq : \frac{2n+1}{\sqrt{n+1}} \geq 2\sqrt{n}$$

$$V \Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 1 \geq 4n^2 + 4n \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (2n + 1)^2 \geq 4n(n + 1) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow 2n + 1 \geq 2\sqrt{n}\sqrt{n + 1} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n + 1}{\sqrt{n + 1}} \geq \sqrt{n} \quad (4)$$