

MATEMÁTICAS II

ESCUELA DE VERANO 2008

Problema 16 - Guía I

Demuestre por contradicción la siguiente proposición: *Los 123 residentes de un edificio tienen edades que suman 3813 años, entonces existen 100 de ellos cuyas edades suman al menos 3100 años*

Demostración.-

Supongamos, para llegar a una contradicción, que si tomamos cien individuos cualesquiera de los 123 residentes la suma de las edades resulta ser siempre menor a 3100. En particular sea a_1 el individuo con más edad de entre todos los residentes (el cual existe pues tenemos una cantidad finita de ellos); sea a_2 el individuo mayor de los 122 que van quedando y así sucesivamente.

Después de la elección tenemos determinados a los $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ residentes de mayor edad y llamemos $b_1, b_2, \dots, b_{23}$ a los restantes. Por la forma de elección se tendrá que

$$a_i \geq b_j$$

para cualquier $i \in \{1, \dots, 100\}$ y para cualquier $j \in \{1, \dots, 23\}$

Ahora sumamos sobre los 23 subíndices de j , por comodidad introducimos el símbolo $\sum_{j=1}^{23} b_j$ que significa la suma de los b_j , es decir,

$$\sum_{j=1}^{23} b_j = b_1 + b_2 + \dots + b_{23}$$

Como $a_i \geq b_1, a_i > b_2, \dots, a_i > b_{23}$ para cualquier i , entonces

$$23 a_i \geq \sum_{j=1}^{23} b_j$$

usamos que la suma de los 123 individuos es 3813. Como la suma de los a_i es menor a 3100 se tiene que

$$\sum_{j=1}^{23} b_j \geq 713$$

juntando los dos resultados anteriores nos queda

$$23 a_i \geq 713$$

dividiendo

$$a_i \geq 31$$

para cualquier $i \in \{1, \dots, 100\}$, luego sumando sobre el subíndice i se tiene que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = \sum_{i=1}^{100} a_i \geq 3100$$

lo cual claramente es una contradicción.

Como el único supuesto que hicimos fue que si tomabamos cien individuos cualesquiera de los 123 residentes la suma de las edades resultaba ser siempre menor a 3100 entonces concluimos que *existen 100 de ellos cuyas edades suman al menos 3100 años*