

Auxiliar 3: Álgebra de lógica y cuantificadores

Avelio Sepúlveda

6 de Enero de 2010

P1.- Demuestre sin usar tabla de verdad las siguientes tautologías

a.- $[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r] \Rightarrow \bar{p}$

b.- $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$

P2.- Si la siguiente preposición es falsa, encuentre los valores de verdad de p, q, r, s

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{r} \Rightarrow \bar{s})] \Rightarrow [p \Rightarrow (q \wedge r)]$$

P3.- Dadas p y q proposiciones. Se define el operador lógico $p \diamond q$ como la proposición que es verdadera ssi q es verdadera y p es falsa

a.- Escriba la tabla de verdad de $p \diamond q$

b.- Describa $\diamond$ usando los conectivos lógicos $\wedge, \vee, \sim$

c.- Muestre que:

$$\blacksquare (p \vee q) \diamond r \Leftrightarrow (p \diamond r) \wedge (q \diamond r)$$

P4.- Se define $A := \{2, 4, 8, 16, 32\}$.

a.- Niegue las siguientes proposiciones

1. $(\forall x \in A)x^2 \in A$
2. $(\exists x \in A)2^x \in A$
3. $(\exists x \in A)(\forall y \in A)x \neq y \Rightarrow 2x \leq y$
4. $(\forall x \in A)(\exists y \in A)2x > y \Rightarrow 2y \leq x$

b.- Encuentre el valor de verdad de las proposiciones de la parte anterior.

0.1. Respuestas

P1.-

a.-

Para realizar este problema partiremos de la parte izquierda y usando tautología implicaremos la parte izquierda.

$$\begin{aligned}
 & (p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r && \backslash \text{distributividad} \\
 \Leftrightarrow & (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge [(\bar{r} \wedge r) \vee (q \wedge r)] \\
 \Leftrightarrow & (\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge q \wedge r && \backslash \text{distributividad} \\
 \Leftrightarrow & [(\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{q} \wedge q)] \wedge r \\
 \Leftrightarrow & \bar{p} \wedge q \wedge r && \backslash \text{como } p \wedge q \Rightarrow p \\
 \Rightarrow & \bar{p}
 \end{aligned}$$

b.-

Al igual que en el problema anterior partiremos desde la parte izquierda y llegaremos a la derecha

$$\begin{aligned}
 & p \wedge (p \vee q) \\
 \Leftrightarrow & (p \vee F) \wedge (p \vee q) \\
 \Leftrightarrow & p \vee (q \wedge F) \\
 \Leftrightarrow & p
 \end{aligned}$$

P2.-

Sabemos que un implica es falso ssi lo primero es verdadero y lo segundo es

falso, luego

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\bar{r} \Rightarrow \bar{s}) \Leftrightarrow V \quad (1)$$

$$[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow F \quad (2)$$

De (2) sacamos

$$[p \Leftrightarrow V] \wedge [(q \wedge r) \Leftrightarrow F]$$

De (1) y lo anterior sacamos

$$[q \Leftrightarrow V] \wedge [\bar{s} \vee r \Leftrightarrow V]$$

Como $q \Leftrightarrow V$ y $q \wedge r \Leftrightarrow F$ entonces $r \Leftrightarrow F$, y como $\bar{s} \vee r \Leftrightarrow V$ luego $s \Leftrightarrow F$.

P3

a.-

p	q	$p \Diamond q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

b.-

Como esta nueva proposición tiene solo y V, la podremos representar con un $\wedge$, pero como no tienen el V en el mismo lugar, se deben usar negaciones para arreglar, eso. Luego de tener esto en cuenta notamos que $p \Diamond q \Leftrightarrow \bar{p} \wedge q$

c.-

Para realizar este ejercicio partiremos del lado izquierdo, y solo con tautologías y ssi llegaremos al derecho.

$$\begin{aligned}
 & (p \vee q) \diamond r \\
 \Leftrightarrow & \bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r \\
 \Leftrightarrow & \bar{p} \wedge r \wedge \bar{q} \wedge r \\
 \Leftrightarrow & (p \diamond r) \wedge (q \diamond r)
 \end{aligned}$$

P4.-

a.-

1. $(\exists x \in A)x^2 \notin A$
2. $(\forall x \in A)2^x \notin A$
3. $(\forall x \in A)(\exists y \in A)x \neq y \wedge 2x > y$
4. $(\exists x \in A)(\forall y \in A)2x > y \wedge 2y > x$

b.-

1. F, pues la negación es cierta para 32
2. V, para x=2
3. V, para x=32 funciona para todo y
4. V, para x=2 y=32, x=4 y=32, x=8 y=32, x=16 y=2, x=32 y=2