Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2010 - Matemáticas II
Profesor: José Zamora P.
Auxiliares: Rodrigo Chi, Rodrigo Orellana & César Vigouroux

Enunciado Auxiliar 9 - 15/01/2010

1. Demostrar mediante inducción que $\forall n \geq 1$:

$$(1+\alpha)(1+\alpha^2)(1+\alpha^4)\cdots(1+\alpha^{2^{n-1}}) = \frac{1-\alpha^{2^n}}{1-\alpha} \quad \alpha \neq 1$$

2. Calcular las siguientes sumatorias.

   a) $\sum_{k=n}^{3n} \frac{k^2+2^k}{2}$.

   b) $1 \cdot 99 + 2 \cdot 98 + \ldots + 99 \cdot 1$

3. Hallar el dominio de las siguientes funciones

   a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

   b) $g(x) = \frac{1}{x^4 - 5x^2 - 36}$

4. Dadas las funciones siendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definidas por $f(x) = x^2 + 2$ y

$$f \circ g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & \text{si } x > -2 \\ 4 & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$$

   Calcular $g(x)$

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   Con $a, b \in \mathbb{R}$. Estudiar los valores de a y b de modo que la función sea biyectiva.