Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2010 - Matemáticas II
Profesor: José Zamora P.
Auxiliares: Rodrigo Chi, Rodrigo Orellana & César Vigouroux

Pauta Ejercicio 1 - 13/01/2010

Solución P1.- Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $5^{2n+1} + 7^{2n+1}$ es divisible por 6.

Caso Base $n = 0$:

$5^1 + 7^1 = 12$ que es divisible por 6.

Hipótesis de Inducción:

Asumiremos que $5^{2n+1} + 7^{2n+1}$ es divisible por 6.

Paso Inductivo:

Por Demostrar que: $5^{2(n+1)+1} + 7^{2(n+1)+1}$ es divisible por 6.

Solución:

Notemos que

$$\begin{aligned}
5^{2(n+1)+1} + 7^{2(n+1)+1} &= 5^{2n+3} + 7^{2n+3} \\
&= 25 \cdot 5^{2n+1} + 49 \cdot 7^{2n+1} \\
&= 25 \cdot (5^{2n+1} + 7^{2n+1}) + 24 \cdot 7^{2n+1} \\
&= 25 \cdot \underbrace{(5^{2n+1} + 7^{2n+1})}_{6p} + 6 \cdot 4 \cdot 7^{2n+1} \quad (\star) \\
&= 6(25p + 4 \cdot 7^{2n+1})
\end{aligned}$$

Donde en $(\star)$ se uso la H.I., todo número divisible por 6 puede ser escrito de la forma $6p$ con $p \in \mathbb{Z}$.

χ

Solución P2.- Se define la Sucesión de Fibonacci, como $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y ;

$$F_{i+2} = F_{i+1} + F_i$$

Demuestre mediante inducción que la suma de los n primeros términos es:

$$F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-1} = F_{n+1} - 1$$

Caso Base $n = 0$:

$F_0 = F_2 - 1 = 0$ (Notemos que por enunciado $F_0 = 0$ y $F_2 = F_0 + F_1 = 1$).

Hipótesis de Inducción:

Asumiremos que $F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-1} = F_{n+1} - 1$ es cierto.

Paso Inductivo:

Por Demostrar que: $F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - 1$

Solución:

Por H.I. tenemos que $F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-1} = F_{n+1} - 1$, sumando a ambos lados F_n tenemos que:

$$\begin{aligned} F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-1} + F_n &= F_{n+1} - 1 + F_n \\ &= F_{n+1} + F_n - 1 \ (\star\star) \\ &= F_{n+2} + 1 \end{aligned}$$

Donde en $(\star\star)$ se uso la definición de la Sucesión de Fibionacci.

χ