Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2010 - Matemáticas II
Profesor: José Zamora P.
Auxiliares: Rodrigo Chi, Rodrigo Orellana & César Vigouroux

# Enunciado Auxiliar 5 - 11/01/2010

1. Demuestre usando inducción que: $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene:

   **a)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

   **b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$

   **c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}$

2. Pruebe por inducción los siguientes resultados:

   **a)** $\forall n \in \mathbb{N}$ un tablero de $2^n \times 2^n$ al cual se le remueve un casillero puede ser cubierto por triminoes (figura que cubre 3 casilleros, similar a una L)

   **b)** $\forall n \in \mathbb{N}$ $n$ rectas diferentes que se encuentran en un plano y pasan por un punto en común, dividen al plano en $2n$ partes.

   **c)** $\forall n \in \mathbb{N}$ La suma de los ángulos interiores de un polígono de $n$ lados es $(n-2) \cdot 180$

   **d)** La sucesión de Fibonacci se define como $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $a_1 = a_2 = 1$. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene: $a_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

3. Sean $n$ rectas en el plano, las cuales dividen al plano en $R_n$ regiones, algunas no acotadas. Pruebe que es posible colorear estas regiones, donde dos regiones adyacentes (que comparten un segmento) tienen distinto color, usando dos colores.

4. Pruebe que si en la pregunta anterior, consideramos $n$ circunferencias en lugar de rectas, entonces las nuevas $R_n$ regiones pueden ser coloreadas del mismo modo que antes.