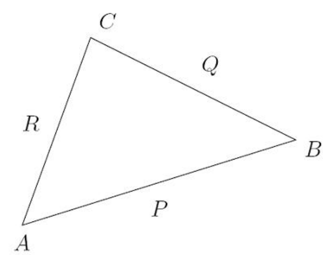
Ejercicio 1: Verano 2006

Considere el triángulo ABC de la figura. Los puntos P, Q y R son puntos medios de los lados indicados.



(1) Calcule las sumas $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{RC}$ y $2\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{RP}$.

Sol:

Usando propiedades de vectores se tiene:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ} &= \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{BQ}\\
&= \overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{BQ} \text{ (Usando que } \overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{QC}\text{)}\\
&= \overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QC}\\
&= \overrightarrow{AC}\\
\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{RC} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CR}\\
&= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CR}\\
&= \overrightarrow{AR}\\
2\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{RP} &= \overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{CQ}\\
&= \overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CQ}\\
&= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}\\
&= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB})\\
&= \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB})\\
&= \overrightarrow{AB})
\end{aligned}$$

(2) Se define el punto G mediante la relación $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. Usando la identidad $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, pruebe las igualdades

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\\
\overrightarrow{BG} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right).
\end{aligned}$$

Sol:
Por definición:

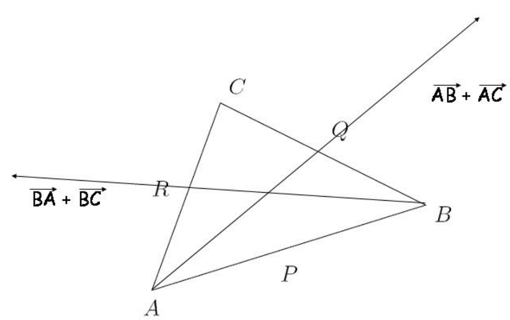
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right),\\ &= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right),\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Usando lo encontrado antes, se tiene:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}\\ &= -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AG}\\ &= -\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})\end{aligned}$$

(3) Dibuje los vectores $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$. Encuentre el número real λ tal que $\overrightarrow{BG}=\lambda\overrightarrow{BR}$

Sol:
Se tiene la siguiente figura:



Se debe notar que

$$\overrightarrow{BR}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CR}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$$

Luego, se busca λ tal que, $\overrightarrow{BG}=\lambda\overrightarrow{BR}$, lo que equivale a encontrar λ tal que

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}\lambda\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right).$$

es decir,

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\lambda\right)\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BA}$$

Para que lo anterior ocurra, dado que $\overrightarrow{BA}$ no es paralelo a $\overrightarrow{BC}$, se debe tener que $\lambda=\dfrac{2}{3}$.

Ejercicio 1: Verano 2007

Dado el triángulo de vértices $A=(-2,-1)$, $B=(2,2)$ y $C=\left(\frac{9}{5},-\frac{19}{10}\right)$.

(1) Determine las ecuaciones vectorial y cartesiana de la recta L_1 que pasa por los vértices A y B.

Sol:

- Ecuación vectorial: Dados los puntos A y B, un vector director de la recta que pasa por ellos está dado por $\vec{d}=\vec{OA}-\vec{OB}$. Por lo tanto, la recta se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{OA}+\alpha(\vec{OA}-\vec{OB})=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}.$$

- Ecuación cartesiana. La pendiente de la recta está dada por $m=\dfrac{2-(-1)}{2-(-2)}=\dfrac{3}{4}$. Por lo tanto se tiene:

$$y-2=\frac{3}{4}(x-2)\Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}.$$

(2) Determine las ecuaciones vectorial y cartesiana de la recta L_2 que es perpendicular a L_1 y que pasa por el vértice C.

Sol: La forma más simple es encontrar la ecuación cartesiana primero. Dado que L_2 es perpendicular a L_1, se debe tener $m_2=\frac{-4}{3}$. Además como L_2 pasa por C, se tiene:

$$y+\frac{19}{10}=\frac{-4}{3}\left(x-\frac{9}{5}\right)\Leftrightarrow y=\frac{-4}{3}x+\frac{1}{2}.$$

Para encontrar la ecuación cartesiana, podemos encontrar otro punto de L_2 que pertenezca a C, evaluado, por ejemplo, en $x=0$

Para $x=0$ se tiene:

$$y=\frac{-19}{10}+\frac{4}{3}\frac{9}{5}=\frac{-19}{10}+\frac{12}{5}=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el punto $(0,\frac{1}{2})$ pertence a L_2. Luego la ecuación vectorial de L_2 está dada por:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}\frac{9}{5}\\\frac{7}{5}\end{pmatrix}.$$

(3) Encuentre el punto de intersección D entre L_1 y L_2 (este punto debe estar sobre el eje y).

Sol:

Se debe resolver el sistema:

$$\begin{cases} y &= \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \quad \text{(Recta } L_1\text{)} \\ y &= \frac{-4}{3}x + \frac{1}{2} \quad \text{(Recta } L_2\text{)} \end{cases}$$

Inmediatamente se nota que para $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$ tanto para la recta L_1 como para L_2. Por lo tanto, el punto de intersección D entre las dos rectas (que de existir es único), es el punto $D = (0, \frac{1}{2})$.

(4) Calcule la distancia d_1 entre A y B y la distancia d_2 entre C y D (simplifique hasta obtener números enteros).

Sol:

$$d_1 = \sqrt{(2-(-2))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$d_2 = \sqrt{\left(0 - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{-19}{10}\right)\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{25} + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{81+144}{25}} = \sqrt{\frac{225}{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

(5) Compruebe que el área del triángulo es 7.5.

El segmento CD es la altura y el segmento AB es la base. Por lo tanto, el área del triángulo es

$$\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

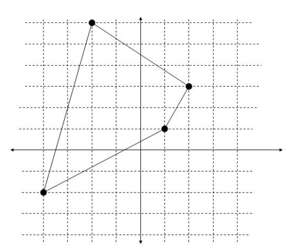
Control 1: Verano 2007

Pregunta 1

Dado el cuadrilátero de vértices: $\overrightarrow{OA} = (1,1)$, $\overrightarrow{OB} = (-4,2)$, $\overrightarrow{OC} = (-2,6)$ y $\overrightarrow{OD} = (2,3)$.

(1) Grafique el cuadrilátero.

Sol:



(2) Sin usar coordenadas y usando propiedades básicas de vectores, simplifique la expresión $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$.

Sol:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{AA} = \vec{O} \end{aligned}$$

(3) Usando coordenadas, determine las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, -$\overrightarrow{AD}$ y calcule las coordenadas de la expresión anterior.

Sol:

Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$, corresponden a un vector que parte del origen y tiene el mismo módulo, dirección y sentido que el vector $\overrightarrow{AB}$. Para calcular las coordenas de este vector, se utilizan los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$. Se tiene: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-5, 1)$. Análogamente, $\overrightarrow{BC} = (2, 4)$, $\overrightarrow{CD} = (4, -3)$ y $-\overrightarrow{AD} = (-1, -2)$. Luego,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} = (-5, 1) + (2, 4) + (4, -3) + (-1, -2) = (0, 0)$$

(4) Verifique que $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ son paralelos.

Sol:

Se debe encontrar λ tal que $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{BC}$, es decir, λ tal que $(1, 2) = \lambda(2, 4)$. Claramente para $\lambda = 2$ cumple lo anterior, con lo que se tiene el paralelismo de los vectores.

Pregunta 2

Considere un paralelógramo $OACB$. El punto E se encuentra sobre la diagonal OC verificando $3\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC}$. El vector $\overrightarrow{OA}$ se denota $\vec{a}$ y el vector $\overrightarrow{OB}$, $\vec{b}$

(1) Encuentre el vector $\overrightarrow{OE}$ en términos de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Sol:

Primero, escribamos el vector $\overrightarrow{OC}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Por lo tanto, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$.

(2) Exprese el vector $\overrightarrow{BE}$ en términos de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Sol:

Se tiene que $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

(3) Dado el número real α exprese el vector $\vec{u} = \overrightarrow{OB} + \alpha\overrightarrow{BE}$ en término de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Sol:

Usando la parte anterior se tiene:

$\vec{u} = \overrightarrow{OB} + \alpha\overrightarrow{BE} = \vec{b} + \alpha\left(\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}\right)$.

(4) Para qué valor de α el vector $\vec{u}$ es una ponderación de solamente el vector $\vec{a}$. Y, en este caso, dónde se encuentra el punto I que satisface $\overrightarrow{OI} = \vec{u}$

Sol:

Factorizando el resultado de la parte anterior es posible escribir:

$\vec{u} = \frac{\alpha}{3}\vec{a} + \left(1 - \frac{2}{3}\alpha\right)\vec{b}$.

Para que $\vec{u}$ dependa sólo de $\vec{a}$ se debe tener

$$1 - \frac{2}{3}\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

En este caso, el punto I será tal que $OI = \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{a}$. Por lo tanto el punto I se encuentra en la mitad del segmento OA.

Control 1: Verano 2008

Pregunta 1

(i) Escriba la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 1.

Sol: La ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio 1 está dada por:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

(ii) Halle la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(2,3)$, $(2,-1)$ y $(4,1)$.

Sol: Por tres puntos en el plano pasa una única circunferencia, la que queda completamente determinada si encontramos su centro y su radio. Por lo tanto, se debe determinar el centro (x_0, y_0) y el radio r de la circunferencia de forma que los tres puntos dados pertenezcan a la circunferencia (satisfagan su ecuación).

Se debe tener:

$$\begin{aligned}
(2-x_0)^2 + (3-y_0)^2 &= r^2 \quad \text{Para que el punto } (2,3) \text{ pertenezca a la circunferencia}(Ec.1)\\
(2-x_0)^2 + (-1-y_0)^2 &= r^2 \quad \text{Para que el punto } (2,-1) \text{ pertenezca a la circunferencia}(Ec.2)\\
(4-x_0)^2 + (1-y_0)^2 &= r^2 \quad \text{Para que el punto } (4,1) \text{ pertenezca a la circunferencia}(Ec.1)
\end{aligned}$$

Combinando las ecuaciones $(Ec.1)$ y $(Ec.2)$ se puede determinar la coordenada Y del centro de la circunferencia, y_0:

$$(3-y_0)^2 = (-1-y_0)^2 \Leftrightarrow 9 - 6y_0 + y_0^2 = 1 + 2y_0 + y_0^2 \Leftrightarrow y_0 = 1$$

Sabiendo ésto y combinando las ecuaciones $(Ec.1)$ y $(Ec.3)$ se puede determinar la coordenada X del centro, x_0:

$$(4-x_0)^2 = (2-x_0)^+4 \Leftrightarrow 14 - 8x_0 + x_0^2 = 4 - 4x_0 + x_0^2 + 4 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

Por lo tanto, el centro de la circunferencia es el punto $(2,1)$. Utilizando esto en cualquiera de las ecuaciones $(Ec.1)$, $(Ec.2)$ o $(Ec.3)$ es posible determinar el radio. Reemplazando, por ejemplo, en $(Ec.1)$ se tiene que $r^2 = 4$, es decir, $r = 2$.

Así, se ha determinado la ecuación de la única circunferencia que pasa por los tres puntos dados, con centro en $(x_0, y_0) = (2,1)$ y radio $r = 2$:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

(iii) Las circunferencias descritas arriba se intersectan en dos puntos P y Q. Encuéntrelos.

Sol: Tenemos las siguientes circunferencias:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 1\\
(x-2)^2 + (y-1)^2 &= 4
\end{aligned}$$

Desarrollando la ecuación de la circunferencia encontrada en la parte (ii) y usando la ecuación (i) se tiene:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{=1} - 4x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = -2x$$

Por lo tanto, los puntos de intersección están contenidos en la recta $y = -2x$ y además deben pertenecer a las circunferencias. Intersectando la recta obtenida con una de las circunferencias, se tiene $x^2 + (-2x)^2 = 1$, de donde se obtiene $x = \dfrac{1}{5}$ o $x = \dfrac{-1}{5}$.

Por lo tanto, los puntos de intersección entre las dos circunferencias serán $P = \left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{-2}{5}\right)$ y $Q = \left(\dfrac{-1}{5}, \dfrac{2}{5}\right)$.

(iv) Determine el foco F de la parábola de ecuación $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 2$.

Sol: Lo primero es escribir la ecuación en forma canónica $(y - y_0) = 4p(x - x_0)^2$. Para esto, se debe completar el cuadrado de binomio,

$$-\frac{1}{4}x^2 + x - 2 = -\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 8) = -\frac{1}{4}(\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} + 4) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 - 1$$

Luego, la ecuación de la parábola se puede escribir como $y + 1 = -\dfrac{1}{4}(x-2)^2$. Por lo tanto, el vértice de la parábola se encuentra en $V = (2, -1)$ y su foco en $F = (2, \frac{-5}{4})$.

(v) Establezca la ecuación vectorial de la recta que pasa por F y es paralela al segmento $\overline{PQ}$.

Sol: Lo primero es determinar el vector director de la recta que contiene al segmento $\overline{PQ}$,

$$\vec{d} = \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la ecuación vectorial de la recta que pasa por F y tiene vector director $\vec{d}$ está dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{-5}{4} \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Pregunta 2 Considere los puntos $A = (4,3)$, $B = (3,4)$ y $O = (0,0)$.

(i) Verifique que el triángulo de vértices A, B y C es isósceles.

Sol: Se comprueba que $d(A,O) = ||(4,3) - (0,0)|| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 = d(B,O)$. Por lo tanto, dos lados tienen igual medida, con lo que el triángulo es isósceles.

(ii) Denotamos por L la mediatriz (recta perpendicular por el punto medio) del segmento $\overline{AB}$. Determine su ecuación.

Sol: El punto medio del segmento $\overline{AB}$ es $M = \frac{1}{2}[(3,4) + (4,3)] = (\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$. La pendiente de la recta que contiene al segmento $\overline{AB}$ es $m = \dfrac{4-3}{3-4} = -1$. Luego, la pendiente de una recta perpendicular a la recta que contiene al segmento $\overline{AB}$ será $m_p = 1$. Por lo tanto, la ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ de forma perpendicular está dada por:

$$y - \frac{7}{2} = 1 \cdot (x - \frac{7}{2}) \Leftrightarrow y = x.$$

(iii) Use congruencia de triánguilos para probar que L también es la bisectriz del ángulo $\widehat{AOB}$.

Sol: Dado que el triángulo ABC es isócelos, los triángulos AOM y BOM son congruentes. Por lo tanto, el ángulo AOM es igual al ángulo BOM.

(iv) Use lo anterior para encontrar **una** circunferencia (existen 4) de radio 1 que sea tangente a las rectas $y = \frac{4}{3}x$ e $y = \frac{3}{4}x$. **Indicación:** El centro de dos de esas circunferencias pertenecen a L, ¿por qué?

Sol: Dos de esas circunferencias tienen su centro sobre la recta L dado que esta recta bisecta el ángulo AOB. Llamando C al centro de la circunferencia, y dado que es tangente a las 2 rectas, los triángulos formados OBC y OAC son congruentes. Una forma de encontrar esta circunferencia, es encontrar una recta perpendicular a la recta $y = \frac{3}{4}x$. Se sabe que si una recta es tangente a una circunferencia, el radio es perpendicular a la recta tangente. Supongamos que el punto de tangencia es $T = (x_T, y_T)$. La recta que pasa por el centro de la circunferencia y el punto de tangencia estará dada por:

$$y - y_T = \frac{-4}{3}(x - x_T)$$

Si el centro de la circunferencia se ubica sobre la recta $y = x$, las coordenadas del centro están dadas por: $x_C = y_C = \dfrac{4}{7}x_T + \dfrac{3}{7}y_T$.

Además, la distancia al centro de la circunferenciaal punto de tangencia debe ser $r = 1$. Además $y_T = \frac{3}{4}x_T$, pues este punto pertenece a la recta $y = \frac{3}{4}x$. Por lo tanto se debe tener:

$$d(T, C) = 1 = \sqrt{(x_T - x_C)^2 + (y_T - y_C)^2}$$

$$\Rightarrow \left(x_T - \left(\frac{4}{7}x_T + \frac{3}{7}\left[\frac{3}{4}x_T\right]\right)\right)^2 + \left(\frac{3}{4}x_T - \left(\frac{4}{7}x_T + \frac{3}{7}\left[\frac{3}{4}x_T\right]\right)\right)^2 = 1$$

Resolviendo se obtiene: $x_T = \dfrac{28}{5}$, lo que implica $y_T = \dfrac{21}{5}$. Además reemplazando se obtiene $x_C = y_C = 5$. Entonces la ecuación de una de las circunferencias está dada por:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = 1 \Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 1$$