ESCUELA DE VERANO 2010 - MATEMÁTICAS I

Profesores: F. Célery, J. González, M. A. Vega, M. F. Yáñez.

GUÍA #1: Vectores

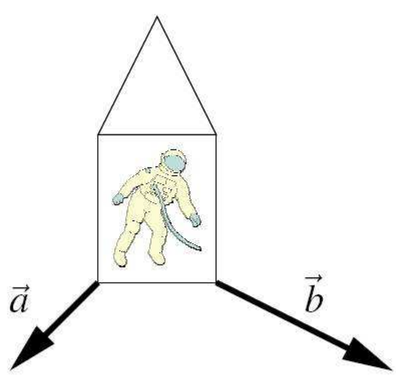
Problema 1. Dibuje los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ en un sistema de coordenadas. Calcule los nuevos vectores $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = \vec{c} + \vec{d}$, $\vec{z} = \vec{a} + \vec{c}$ y grafíquelos.

Problema 2. Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\lambda = 3$, entonces ¿cuánto vale $\lambda\, \vec{a}$?. Grafique.

Problema 3. Sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Represente los vectores indicados en el plano: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $2\vec{u}$, $-4\vec{v}$, $\vec{u} + 2\vec{v}$, $\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ y $3\vec{u} + 4\vec{v}$.

Problema 4. El cohete de la figura, tiene dos propulsores orientados según los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Estos propulsores funcionan independientemente, generando un empuje sobre la nave de la forma $\vec{e} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.



1. Encuentre las coordenadas del vector $\vec{e}$ en términos de α y β.
2. Para qué valores de α y β, el empuje $\vec{e}$ es vertical e igual a $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$.

3. Si $\beta = 2$, ¿Es posible propulsar la nave en forma horizontal?

Problema 5. Dados los puntos $A = (1,1)$, $B = (7,-2)$, $C = (6,5)$ y $D = (3,6)$ calcule:

1. E punto medio de AB
2. F punto medio de BD
3. G punto medio de CD
4. H punto medio de AC
5. Grafique en una misma figura los cuadriláteros $ABCD$ y $EFGH$.
6. Compruebe que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HG} &= \overrightarrow{EF} \\ \overrightarrow{EH} &= \overrightarrow{FG}. \end{aligned}$$

7. Deduzca de esto que $EFGH$ es un paralelogramo.

Problema 6. Considere los vectores $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Encuentre las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. ¿Son colineales los puntos A, B y C?

Problema 7. Determine si los puntos P, Q y R son colineales sabiendo que $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $\vec{r} = \begin{pmatrix} 31 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Problema 8. Se sabe que los puntos P, Q y R son colineales donde $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ x \end{pmatrix}$. Para determinar el valor de x, proceda de las siguientes dos formas:

1. **Método gráfico**: Dibuje los puntos P y Q, dibuje la recta que pasa por esos puntos y busque donde debiera estar el punto R.
2. **Método analítico**: Escriba las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$. Con esto determine el valor de $x-3$ de modo que los vectores sean paralelos. Finalmente obtenga el valor de x.

Problema 9. Encuentre los valores para x e y que garantizan que A, B y M son colineales, sabiendo que $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ y $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$.

Problema 10. Los puntos A, B, C y D tienen los siguientes vectores posición: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ y $\vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Calcule las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ y compruebe que **no** son paralelos.

Problema 11. Considere el triángulo ABC cuyos vértices son $A = (0,0)$, $B = (8,0)$ y $C = (5,6)$.

1. Se definen los puntos P y Q mediante las relaciones $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Encuentre las coordenadas de los vectores posición $\vec{p}$ y $\vec{q}$.

2. Se define el punto R, en términos del real α, mediante la relación $\overrightarrow{BR} = \alpha\overrightarrow{BC}$. Encuentre las coordenadas del vector posición $\vec{r}$ en términos de α.
3. ¿Para qué valor de α el vector $\overrightarrow{AR}$ es paralelo al vector $\overrightarrow{PQ}$?

Problema 12. Con los vectores posición $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ y el vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ se asocia a cada α el punto M tal que $\overrightarrow{CM} = \alpha\vec{u}$. Escriba las coordenadas de M en términos de α. ¿Para qué valor de α se obtiene a M sobre el trazo AB?

Problema 13. Obtenga el producto punto de cada par de vectores dado:

$$i)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ii)\ \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad iii)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 14. Demuestre que el triángulo con vértices $P = (4,1)$, $Q = (1,0)$ y $R = (3,-6)$ es un triángulo rectángulo.

Problema 15. Determine el módulo de los siguientes vectores:

$$i)\ \vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad ii)\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad iii)\ \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Verifique el valor obtenido gráficamente, midiendo el largo de cada vector con una regla.

Problema 16. Encuentre x tal que el módulo del vector de coordenadas $\begin{pmatrix} x \\ 4 \end{pmatrix}$ sea 5.

Problema 17. Encuentre y tal que el módulo del vector $\begin{pmatrix} 4 \\ y \end{pmatrix}$ sea 32.

Problema 18. Un punto del plano tiene primera coordenada (abscisa) 3 y se encuentra a la misma distancia de los puntos $(1,1)$ y $(-2,5)$. ¿Cuál es la segunda coordenada (ordenada) del punto?

Problema 19. Encuentre Q de manera que $\overrightarrow{PQ}$ sea un vector de misma dirección y sentido que $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ pero cuya magnitud sea 1.

Problema 20. Encuentre Q' de manera que $\overrightarrow{PQ'}$ sea un vector de misma dirección, sentido opuesto a $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y cuya magnitud sea 15.

Problema 21. Considere el triángulo cuyos vértices son $A = (0,0)$, $B = (b,1)$ y $C = (0,c)$. Suponiendo conocido el valor de b, y sabiendo que el ángulo en B es recto, calcule las coordenadas de C. Si D es el punto medio de AC, compruebe que la distancia de D a B es igual a la distancia de D a A.

Problema 22. Encuentre la longitud del segmento $\overline{PQ}$ donde $P = (1,4)$ y $Q = (3,9)$.

Problema 23. Un punto del plano tiene primera coordenada (abscisa) 3 y se encuentra a la misma distancia de los puntos $(1,1)$ y $(-2,5)$. Cuál es la segunda coordenada (ordenada) del punto.

Problema 24. Dados tres vectores del plano $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tales que:

$$||\vec{a}|| = ||\vec{b}|| \qquad \text{(o bien } |\vec{a}| = |\vec{b}|\text{) y } \vec{c} = -\vec{b},$$

demuestre que:

$$(\vec{c} - \vec{a}) \perp (\vec{b} - \vec{a})$$

Indicación: puede hacer la demostración utilizando las propiedades del producto punto o bien utilizando operaciones con coordenadas $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Problema 25. Se sabe que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ verifican $\vec{u} \cdot \vec{u} = 2$, $\vec{v} \cdot \vec{v} = 1$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{2}{3}$. Calcule los productos siguientes: $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$, $\vec{u} \cdot (\vec{u} - 3\vec{v})$, $(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 4\vec{v})$, $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$, $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$.

¿Es posible encontrar α que cumpla $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \alpha\vec{v}) = 0$?¿O que cumpla $||\alpha\vec{u}|| = 1$? ¿O bien $||\vec{u} + \alpha\vec{v}|| = 1$?

Problema 26. ✠ Pruebe que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores ortogonales en el plano, entonces $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2$.

Problema 27. ✠ Probar usando vectores que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Indicación: Sin pérdida de generalidad, considere un sistema de referencia con origen en el centro de la semicircunferencia y con uno de los ejes coordenados sobre el diámetro.