

DESAFÍOS 1

11 de enero de 2010

Guía 1: Vectores

Problema 26

Pruebe que si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores ortogonales en el plano, entonces $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2$.

Demostración

Sean $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dos vectores ortogonales en el plano. Esto es $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Por definición de producto punto se obtiene que:

$$u_1v_1 + u_2v_2 = 0$$

o, equivalentemente

$$u_1v_1 = -u_2v_2 \tag{1}$$

Calculemos ahora $|\vec{u} + \vec{v}|^2$:

$$\begin{aligned}
|\vec{u} + \vec{v}|^2 &= \left| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right|^2 \\
&= \left| \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \right|^2 \\
&= \left(\sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2} \right)^2 \\
&= \left(\sqrt{(u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2) + (u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2)} \right)^2 \\
&= (u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2) + (u_2^2 + 2u_2v_2 + v_2^2) \\
&= u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2
\end{aligned}$$

La última igualdad se tiene por la ortogonalidad de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (ecuación 1).

De manera análoga, calculamos ahora $|\vec{u} - \vec{v}|^2$:

$$\begin{aligned}
|\vec{u} - \vec{v}|^2 &= \left| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right|^2 \\
&= \left| \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} \right|^2 \\
&= \left(\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2} \right)^2 \\
&= \left(\sqrt{(u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2) + (u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2)} \right)^2 \\
&= (u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2) + (u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2) \\
&= u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2
\end{aligned}$$

Entonces, hemos probado que bajo la condición de ortogonalidad de dos vectores cualesquiera, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, se tiene que $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2$.

Problema 27

Probar usando vectores que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

Indicación: Sin pérdida de generalidad, considere un sistema de referencia con origen en el centro de la semicircunferencia y con uno de los ejes coordenados sobre el diámetro.

Demostración

Consideremos la semicircunferencia de radio r centrada en el origen O , donde el vector $\overrightarrow{AB}$ constituye el diámetro de la circunferencia (ver Figura 1)

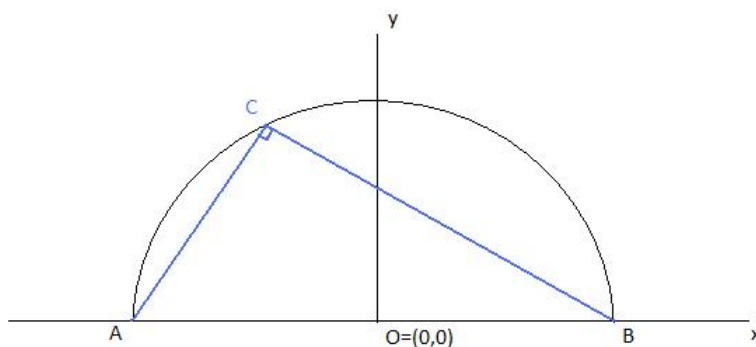


Figura 1: Problema 27

Consideremos un punto $C = (c_1, c_2)$ cualquiera de la semicircunferencia. Probaremos que el ángulo que forma el vector $\overrightarrow{AC}$ con el vector $\overrightarrow{BC}$ es un ángulo recto. Lo anterior equivale a demostrar que el producto punto entre aquellos vectores es nulo.

Primero notemos que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OA} &= \vec{a} = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix} \\ r^2 &= |\overrightarrow{OC}|^2 = (\sqrt{c_1^2 + c_2^2})^2 = c_1^2 + c_2^2\end{aligned}\tag{2}$$

Dado esto, podemos escribir $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ como sigue:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} c_1 + r \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{c} - \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} c_1 - r \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora el producto punto entre $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} c_1 + r \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 - r \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= (c_1 + r)(c_1 - r) + c_2^2 \\ &= c_1^2 + c_2^2 - r^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

La última igualdad, se tiene usando la ecuación (2).

Y entonces hemos demostrado la afirmación del enunciado.