Pauta Tarea 3 Matemáticas I 2010
Profesor: Felipe Célèry
Auxiliar: Andrea Vidal

Problema 5

Nos dicen en un principio que debemos escribir las ecuaciones vectoriales de las rectas que unen los vértices con los puntos medios de los lados opuestos. Para ello sacamos los puntos medios de cada uno de los lados del triángulo.

Pto. Medio $\vec{AC}$= D $=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Pto. Medio $\vec{AB}$ = F $=\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

Pto. Medio $\vec{BC}$ = E $=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

Luego debemos escribir cada una de las ecuaciones correspondientes, lo cual podemos hacer ya que conocemos al menos dos puntos de cada recta pedida. Recordemos que la ecuación vectorial es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{p} + \lambda \vec{d}$$

Ahora cada una de las rectas:

$$\vec{L}_{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_{BD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_{CF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-11}{2} \end{pmatrix}$$

Después nos piden intersectar las rectas, para ello las igualamos y nos queda lo siguente:

$\vec{L}_{AE} \bigcap \vec{L}_{BD} \Longleftrightarrow \vec{L}_{AE} = \vec{L}_{BD}$

Tenemos:

$$\lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$
$$\lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Con esto podemos hacer un sistema de ecuaciones

$\frac{3}{2}\lambda+\frac{3}{2}\mu=2$
$2\lambda - \frac{7}{2}\mu = -1$

De donde :
$\lambda = \frac{2}{3}$ y $\mu = \frac{2}{3}$

Si reemplazamos λ y μ en sus respectivas ecuaciones tenemos:

1) $\frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Ahora para verificar que dicho punto pertenece a la recta lo único que debemos hacer es reemplzar ese punto en la recta que no intersectamos y encontrar el valor de α que corresponda. Entonces reemplzamos el punto $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ en la recta $\vec{L}_{CF}$ Nos queda lo sgte:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-11}{2} \end{pmatrix}$$

De donde $\alpha=\frac{2}{3}$

El punto de intersección de las tres rectas es $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

En la parte 3 lo que nos piden hacer en un principio es sacar las rectas perpendiculares a los lados del triángulo. Por tanto saquemos los vectores de los lados:

$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$
$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ahora nosotros sabemos que si:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- Vector $\perp$ $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- Vector $\perp$ $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$
- Vector $\perp$ $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Entonces nosotros queremos que las rectas aparte que sean perpendiculares a los lados correspondientes del triángulo, deben pasar por el punto medio. Por tanto, si nos damos cuenta tenemos un punto por donde pasa cada recta, que vendría siendo su punto medio y también la dirección que queremos que siga, este caso la perpendicular. Con esto tenemos las siguiente ecuaciones de la recta:

$\vec{L} \perp AB = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{L}\perp BC = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{L}\perp AC = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Luego al igual que la parte 2 debemos intersectar las rectas.

$\vec{L}\perp\text{AB} \bigcap \vec{L}\perp\text{BC} \Longleftrightarrow \vec{L}\perp\text{AB} = \vec{L}\perp\text{BC}$

Tenemos que:

$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Con esto planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$\alpha + 6\lambda = \frac{1}{2}$
$2\alpha + \lambda = \frac{5}{2}$

Resolviendo esto tenemos que $\alpha = \frac{29}{22}$ y $\lambda = \frac{-3}{22}$

Ahora reemplazando α y λ en sus respectivas ecuaciones tenemos lo sgte:

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} + \frac{29}{22} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{51}{22} \\ \frac{47}{22} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{-3}{22} \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{51}{22} \\ \frac{47}{22} \end{pmatrix}$

Para verificar que dicho punto pertenece a la recta lo único que debemos hacer es reemplzar ese punto en la recta que no intersectamos y encontrar el valor de μ que corresponda. Entonces reemplzamos el punto $\begin{pmatrix} \frac{51}{22} \\ \frac{47}{22} \end{pmatrix}$ en la recta $\vec{L}\perp$AC. $\begin{pmatrix} \frac{51}{22} \\ \frac{47}{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si despejamos μ nos queda:

$\mu = \frac{-4}{11}$

Para ambos despejes. Por lo tanto las rectas se intersectan en el punto $\begin{pmatrix} \frac{51}{22} \\ \frac{47}{22} \end{pmatrix}$