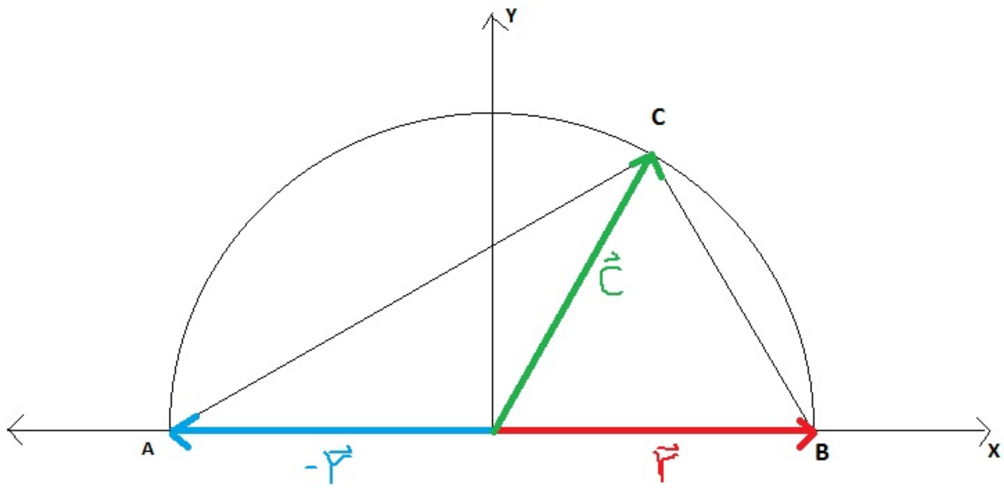
Pauta Desafío Matemáticas I 2010

Profesor: Felipe Celery

Auxiliar: Andrea Vidal



Para demostrar que el ángulo inscrito en una circunferencia es recto, debemos demostrar que el producto punto entre $\vec{AC}$ y $\vec{BC}$ es cero.

$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$

Entonces nos damos cuenta que podemos escribir

$\vec{AC} = \vec{-r} - \vec{c}$
$\vec{BC} = \vec{r} - \vec{c}$

Denominemmos:
$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$
$\vec{-r} = \begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix}$
$\vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Por tanto ahora calculamos el producto punto de los vectores:

$$(\vec{-r} - \vec{c}) \cdot (\vec{r} - \vec{c})$$

$$[\begin{pmatrix} -r \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}] \cdot [\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}]$$

$$\begin{pmatrix} -r - x \\ -y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r - x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$[(\text{-r - x}) \times (r - x) + (-y) \times (-y)$$

$$\text{-1} \times (r + x) \times (r - x) + y^2$$

$$\text{-1} \times (r^2 - x^2) + y^2$$

$$\text{x}^2 - r^2 + y^2$$

$$\text{x}^2 + y^2 - r^2$$

$$(x^2 + y^2) - r^2 \text{ (*)}$$

Ahora tenemos que darnos cuenta de tres cosas:
1)Si sabemos que
$|\vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
Por tanto : $\text{x}^2 + y^2 = |\vec{c}|^2$

2)Al igual que lo anterior tenemos que
$|\vec{r}| = \sqrt{r^2 + 0^2} = \sqrt{r^2}$
Entonces tenemos que : $\text{r}^2 = |\vec{r}|^2$

3)Si $\vec{r}$ y $\vec{c}$, representan el radio de la semicircunferencia, entonces tendrán la misma longitud (módulo)
Por tanto: $|\vec{r}| = |\vec{c}|$

Entonces ahora reemplazando los resultados de 1) y 2) en (*), nos queda lo sgte:

$|\vec{c}|^2 - |\vec{r}|^2$

Utilizando la iguadad de 3) nos queda directamente que:

$|\vec{c}|^2 - |\vec{r}|^2 = 0$

Por tanto hemos demostrado que el producto punto entre $\vec{AC}$ y $\vec{BC}$ es cero, lo que nos dice que son vectores perpediculares, que es lo que queríamos demostrar en un principio.