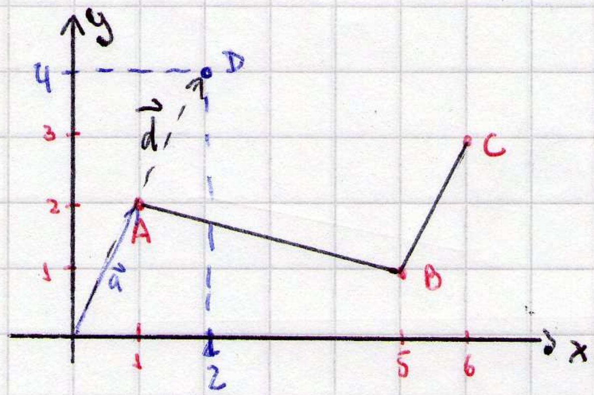
# Ejercicio 1, Matemático I 2010

Profesor: Felipe Célèry
Auxiliar: Andrea Vidal.

1)




$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Como sabemos por enunciado tenemos que ABCD es un paralelogramo, por tanto para encontrar D debíamos utilizar la suma grafica del paralelogramo para ayudarnos con la suma algebraica.

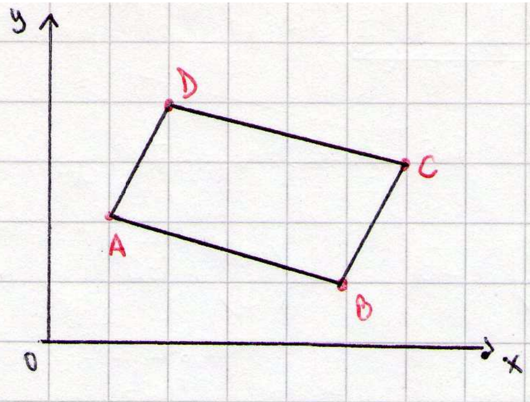
Para esto, calculamos $\vec{BC}$

$$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y como A no se encuentra en el origen a $\vec{BC}$ le sumamos $\vec{a}$, para encontrar $\vec{d}$

$$\Rightarrow \quad \vec{d} = \vec{BC} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ el pto D se ubica en $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$




• Sabemos que las diagonales de este paralelogramo, serán AC y DB.

$\Rightarrow$ Para determinar su longitud (Módulo) calculamos $\vec{AC}$ y $\vec{DB}$

• $\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\vec{DB} = \vec{b} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

$$|\vec{DB}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

* Sea $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

• Para determinar el vector posición del pto de intersección de las diagonales, sólo se calcula el pto medio de las diagonales, ya que debe ser conocido que los diagonales de todo paralelogramo se intersectan en su pto medio.

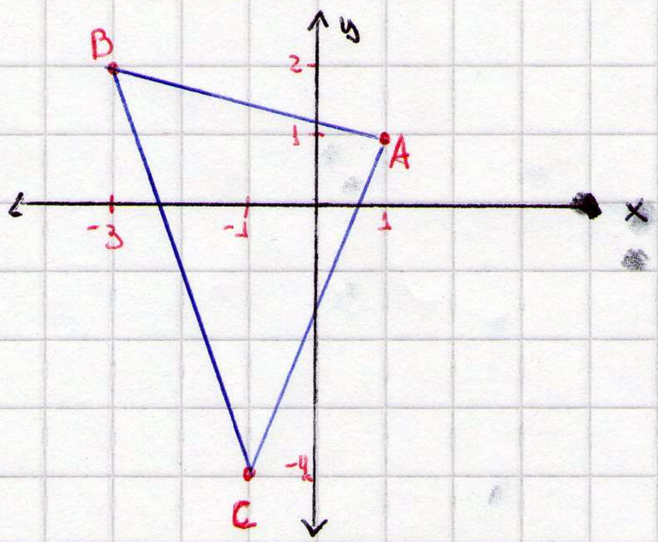
pto $AC = \left( \frac{1+6}{2}, \frac{3+2}{2} \right) = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$

$\therefore$ el vector posición del pto de intersección de los diagonales es $\begin{pmatrix} 7/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$

P2)

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ; $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

i)




- Para encontrar los ptos medios de AB y AC aplicamos la fórmula correspondiente.

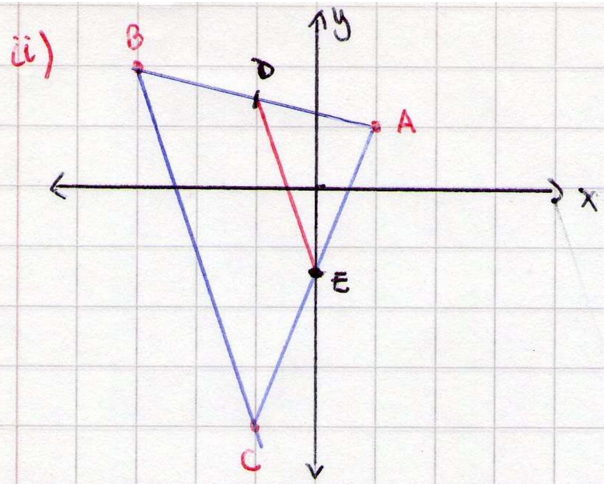
• pto medio = $\left( \frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$

- pto medio AB = $\left( \frac{1 + -3}{2} , \frac{1+2}{2} \right)$

$= \left( \frac{-2}{2} , \frac{3}{2} \right) = \left( -1 , \frac{3}{2} \right)$

- pto medio AC = $\left( \frac{1 + -1}{2} , \frac{1 + -4}{2} \right) = \left( 0 , -\frac{3}{2} \right)$

ii)




* Denotemos D al pto medio de AB. y E al pto medio AC

Para verificar que $\vec{BC}$ es paralelo com $\vec{DE}$ los calculamos

$$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DE} = \vec{e} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

* Primera forma para demostrar que son //

- Sabemos que dos vectores son // si uno es ponderación del otro, entonces tenemos lo sgte

$$\vec{DE} = \alpha \vec{BC}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

por igualdad tenemos

$1 = 2\alpha$ (1)

$-3 = -6\alpha$ (2)

De (1) $\alpha = 1/2$

De (2) $\alpha = 1/2$

$$\vec{BC} = \alpha \vec{DE}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

por igualdad tenemos

$2 = \alpha$ (1)

$-6 = -3\alpha$ (2)

De (1) $2 = \alpha$

De (2) $2 = \alpha$

Como los $\alpha$ son iguales podemos concluir que $\vec{DE} \parallel \vec{BC}$

* Segunda forma para demostrar q' son //

- Si dos vectores son // cumplen lo sgte

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \quad ☺$$

$$\vec{DE} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Nos queda lo siguiente aplicando ☺

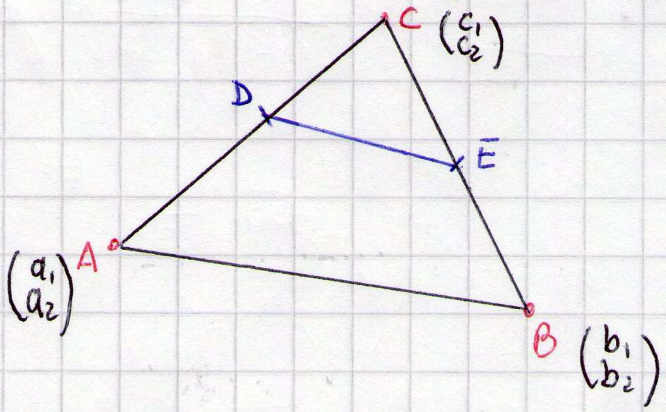
$$1 \cdot {}^-6 - 2 \cdot {}^-3 = {}^-6 - {}^-6 = 0$$

$$\therefore \vec{DE} \; // \; \vec{BC}$$

* Módulo que falta última página

b) Sea ABC un triángulo

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \; ; \; \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$




* Basta con probar sólo para un lado del triángulo

- Llamemos D al pto medio de AC y E al pto medio de BC.

- Calculemos los ptos medios de AC (D) y BC (E)

$$D = \left( \frac{a_1 + c_1}{2} , \frac{a_2 + c_2}{2} \right)$$

$$E = \left( \frac{b_1 + c_1}{2} , \frac{b_2 + c_2}{2} \right)$$

Entonces, lo que nos piden mostrar es
$\vec{AB} \parallel \vec{DE}$

Calculemos:

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DE} = \vec{e} - \vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{b_1 + \cancel{c_1}}{2} \\ \frac{b_2 + \cancel{c_2}}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{a_1 + \cancel{c_1}}{2} \\ \frac{a_2 + \cancel{c_2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b_1 - a_1}{2} \\ \frac{b_2 - a_2}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Con el resultado a la vista, podemos apreciar que $\vec{AB}$ es una ponderación de $\vec{DE}$

$\therefore \vec{AB} \parallel \vec{DE}$

* Para que sean $\parallel$ se debe cumplir
$\vec{a} = \alpha \vec{b}$ ó $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = 0$ con $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

- Después nos piden mostrar que
  - $|\vec{DE}| = \frac{1}{2} |\vec{AB}|$

Calculemos

$$|\vec{DE}| = \sqrt{\left(\frac{b_1 - a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_2 - a_2}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(b_1 - a_1)^2}{4} + \frac{(b_2 - a_2)^2}{4}} \quad / \text{Factorizamos}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\left[(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2\right]}$$

$\Rightarrow$ Ahora nos preguntamos ¿qué número multiplicado 2 veces por sí mismo es $\frac{1}{4}$? R.- $\frac{1}{2}$. (Podemos sacar $\frac{1}{4}$ de la raíz, quedando afuera como $\frac{1}{2}$)

$$\therefore |\vec{DE}| = \frac{1}{2} \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

2) $|\vec{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$

$\therefore$ se ve claramente que
$$|\vec{DE}| = \frac{1}{2}|\vec{AB}|$$

* Módulo vector: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

- Modulo P2 (ii)

La longitud del segmento anterior, se refiere a DE
Entonces calculemos $|\vec{DE}|$

$$|\vec{DE}| = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{(2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\therefore \quad |\vec{DE}| = \frac{1}{2}|\vec{BC}|$$