

Enunciado Auxiliar 15 - Matemática II

Escuela de Verano, Universidad de Chile

26 de Enero 2009

Profesor Cátedra: José Zamora

Profesores Auxiliares: Rodrigo Chi - Francisco Unda - Matías Godoy

Pregunta 1.

Calcule el límite cuando $h \rightarrow 0^+$ y cuando $h \rightarrow 0^-$ de $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ para las siguientes funciones:

- a) $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$
- b) $f(x) = -3x + 2$ en $x_0 = 3$
- c) $f(x) = x^2 + 3x + 5$ en $x_0 = x_0$

Pregunta 2.

El objetivo de esta pregunta es probar que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x}$. Para ello, se proponen los siguientes pasos:

- a) A partir de la desigualdad fundamental de la exponencial demuestre que $1 + \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1$
Indicación: Recuerde que $\ln(x)$ es la función inversa de e^x
- b) Pruebe por Sandwich que: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
- c) Basado en la parte anterior, determine el límite propuesto

Pregunta 3.

Calcule los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$
- c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$
- d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$

Indicaciones: Para a) y b) use apropiadamente la identidad: $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$. Para c) y d) use b).

Pregunta 4.

Calcule las derivadas de las siguientes funciones mediante reglas de derivación:

- a) $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
- b) $g(x) = \frac{x+1}{x^3+x}$
- c) $h(x) = x \sin x$
- d) $i(x) = x \ln(x) + x$

Pregunta 5.

Sea $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una función que cumple que $h(xy) = h(x) + h(y)$

Demostrar que si $h(x) \rightarrow h(1)$ cuando $x \rightarrow 1$ entonces $h(x) \rightarrow h(y)$ cuando $x \rightarrow y$.

Pregunta 6.

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{\ln(1+x)}$

Indicación: Primero pruebe que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$ $a > 0$ y use además P2 parte b)