

---

## ESCUELA DE VERANO 2009 - MATEMÁTICAS II

---

**Profesores:** Raúl Uribe, Pierre Paul Romagnoli, Leonardo Sánchez, José Zamora.

### GUÍA # 2 : Funciones

#### PRACTICANDO LO BÁSICO...

**Selección Múltiple.** En los siguientes ejercicios determine cuál es la alternativa correcta :

1. ¿En cuáles de los siguientes casos la recta  $y = mx + n$  es paralela y no coincidente con  $y = 3x + 2$ ?

a)  $m = 1/3 ; n = 0$

d)  $m = 3 ; n = 2$

b)  $m = 1/3 ; n \neq 0$

e)  $m = 3 ; n \neq 2$

c)  $m = 3 ; n = 0$

2. El gráfico de  $y = x^4 + x^3$  interseca al eje de las abscisas en:

a) Ningún punto

d) 3 puntos

b) 1 punto

e) 4 puntos

c) 2 puntos

3. ¿Para qué valor(es) de  $x$  las funciones  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = 2x - 1$  toman el mismo valor?

a) 0

d)  $\pm 1$

b) 1

e) Para ningún  $x$

c)  $-1$

4. El conjunto de puntos  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  cuyas coordenadas satisfacen la ecuación  $|x - 1| = y$  es:

a) Una circunferencia

b) Una recta

c) Un par de rectas perpendiculares

d) Un par de rectas

e) Un par de puntos

5. La función inversa de  $f(x) = 3x + 5$  es:

a)  $g(x) = \frac{3}{x} + 5$

d)  $g(x) = \frac{1}{3}(5 - x)$

b)  $g(x) = \frac{x}{3} - 5$

e)  $g(x) = \frac{1}{3}(x + 5)$

c)  $g(x) = \frac{1}{3}(x - 5)$

6. Sean  $\alpha$  y  $\beta$  las raíces de  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Las raíces de  $f(px)$ , con  $p \neq 0$ , son:

a)  $p\alpha; p\beta$

d)  $p^2\alpha; p^2\beta$

b)  $p + \alpha; p + \beta$

e)  $p\alpha; -p\beta$

c)  $\frac{\alpha}{p}; \frac{\beta}{p}$

7. Bajo las mismas condiciones del ejercicio anterior ¿Cuáles son las raíces de  $f(x - a)$ ?

- |                               |                                    |
|-------------------------------|------------------------------------|
| a) $\alpha + a$ ; $\beta + a$ | d) $a - \alpha$ ; $a + \beta$      |
| b) $\alpha - a$ ; $\beta - a$ | e) $a - \alpha$ ; $\alpha + \beta$ |
| c) $a - \alpha$ ; $a - \beta$ |                                    |

8. Se sabe que  $-9$  es una solución de  $mx^2 + 25x - 6m = 0$ , entonces, la otra solución es:

- |                  |                   |
|------------------|-------------------|
| a) 3             | d) $\frac{2}{3}$  |
| b) $-3$          | e) $\frac{10}{3}$ |
| c) $\frac{8}{3}$ |                   |
9. Si  $f(x) = |x + 1|$  y  $g(x) = \frac{1}{x}$ , entonces  $(f \circ g)(x) =$
- $\frac{1+x}{x}$  si  $x > 0$ ;  $\frac{-1+x}{x}$  si  $x < 0$
  - $x - 1$  si  $x > 0$ ;  $\frac{1}{x}$  si  $x < 0$
  - $\frac{1+x}{x}$  si  $x > 0$  o  $x < -1$ ;  $\frac{-1-x}{x}$  si  $-1 \leq x$  y  $x < 0$
  - $\frac{1+x}{x}$  si  $x > -1$ ;  $\frac{-1-x}{x}$  si  $x \leq -1$
  - $x - 1$  si  $x > 0$ ;  $\frac{-1-x}{x}$  si  $x < 0$

### Problemas de Desarrollo.

- Sea  $f(x) = mx + n$  una recta. Encuentre  $m$  y  $n$  sabiendo que la recta pasa por los puntos  $(0, 0)$  y  $(-2, 1)$ . Grafique la recta.
- Dados  $a, b$  en  $\mathbb{R}$ , se define la función  $f_{a,b}(x) = ax + b$ .
  - Pruebe que  $f_{1,b}(f_{a,0}(x)) = f_{a,b}(x)$
  - Para  $a \neq 0$ , encuentre la función inversa de  $f_{a,b}$
  - Para  $a \neq 0$  encuentre  $p, q$  en  $\mathbb{R}$  tal que  $f_{a,b}(f_{p,q}(x)) = f_{b,a}(x)$
- Sea la parábola dada por la relación  $y(x) = x^2 + 2x - 8$ .
  - ¿En qué puntos corta al eje  $x$ ?
  - ¿En qué punto corta al eje  $y$ ?
  - ¿Cuáles son las coordenadas del punto mínimo?
  - Dibujar la curva.
- Consideremos la parábola  $P_{ab}$  de ecuación:

$$y(x) = x^2 + (a + b)x + ab,$$

con  $a, b \in \mathbb{R}^+$ ,  $a \geq b$ .

- Bosqueje un gráfico de  $P_{ab}$ , indicando sus raíces, vértice, dominio, recorrido e intersección con el eje  $OY$ .
  - A partir de lo anterior, encuentre la abscisa  $x^*$  que proporciona el mínimo valor  $y(x^*)$  en la parábola  $P_{ab}$ . Indique cuánto es ese valor mínimo.
  - Encuentre  $a$  y  $b$  tal que los puntos  $(2, 25)$  y  $(-1, 4)$  pertenezcan a la parábola  $P_{ab}$ .
- Encuentre los puntos donde la parábola  $y = x^2 + 6x + 9$  y la recta  $y = -\frac{x}{2}$  se intersectan.
  - Determine los puntos de intersección de la recta  $ax + b$  con la parábola  $x^2 + c$ , para  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Analice su resultado para distintos valores de  $a, b, c$  (¿se intersectan?, ¿en cuantos puntos?, etc).
  - ♣ Pruebe que si 2 parábolas tienen 3 puntos en común, entonces son la misma parábola), es decir, pruebe que dados 3 puntos del plano, hay una única parábola que pasa por ellos.
  - Resolver las siguientes ecuaciones en  $x$ , expresando las soluciones en términos de  $a, m$  y  $n$ :
    - $\frac{1}{2}(x - a) + \frac{1}{5}(2x + a) = \frac{3a}{10}$
    - $7x^2 + 4ax - 3a^2 = 0$
    - $mx^2 + \frac{m}{n}x + n = 0$

- d)  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{x} = \frac{1}{m+n+x}$
9. a) Factorice  $x^3 - 5x^2 + 6x$  con términos lineales de la forma  $(x - a)$ .  
Usando lo anterior determine para que valores de  $x$  la función  $f(x) = x(x - 2)(x - 3)$  es positiva, negativa y nula.
- b) Factorice  $5x^3 + 10x^2 - 20x - 40$  con términos lineales. Resuelva la ecuación  $5x^3 + 10x^2 = 20x + 40$ .
10. Si las soluciones de una cierta ecuación de segundo grado son  $x_1 = 2$  y  $x_2 = 3$ , ¿cuál es la ecuación? ¿Es única?
11. Suponga que las raíces  $x_1$  y  $x_2$  de  $mx^2 + 4mx + b = 0$  satisfacen

$$x_1 : x_2 = 1 : 3$$

Calcule  $m$ .

12. Si  $x_1, x_2$  son las soluciones de  $ax^2 + bx + c = 0$ , calcule:

a)  $x_1 - x_2$

d)  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$

b)  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

e)  $x_1^3 + x_2^3$

c)  $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$

f)  $x_1^2 + x_2^2$

13. Demostrar que si las soluciones  $x_1, x_2$  de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$  satisfacen la siguiente relación

$$x_1 : x_2 = 1 : 2$$

entonces  $b^2 = \frac{9ac}{2}$ .

14. Encuentre los valores  $a$  y  $b$  que hacen que las ecuaciones  $ax^2 + 5x - 6 = 0$  y  $7x^2 - bx - 3 = 0$  tengan las mismas soluciones.
15. Sean  $f(x) = x^2 + 1$  y  $g(x) = x - 5$ . Calcular:

a)  $(f + g)(2)$

c)  $(f \circ g)(x)$

b)  $\left(\frac{f}{g}\right)(a)$

d)  $(g \circ f)(-3)$

16. Para las siguientes figuras geométricas: cuadrado, círculo y triángulo equilátero, encuentre una fórmula que relacione el área  $A$  de la figura en función de su perímetro  $P$ .

17. ♣

- a) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  una función que satisface la relación:

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{para todo } x, y \text{ en } \mathbb{R}.$$

1) Probar que  $f(0) = 1$ .

2) Deducir que  $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ .

- b) Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:  $g(xy) = g(x) + g(y)$ , para todo  $x, y$  en  $\mathbb{R}$ .

1) Pruebe que  $g(1) = 0$

2) Pruebe que  $g\left(\frac{1}{x}\right) = -g(x)$

#### EJERCITANDO LOS CONCEPTOS DE DOMINIO E IMAGEN

1. Determinar el dominio de las siguientes funciones reales:

a)  $f_1(x) = \frac{5}{x^2 - 4}$

c)  $f_3(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-3}$

b)  $f_2(x) = 6 + \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

d)  $f_4(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - x}$

$$e) f_5(x) = \sqrt{16 - x^2}$$

$$f) f_6(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 5x - 14}$$

$$g) f_7(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

2. Determine dominio e imagen de las siguientes funciones:

$$a) f_1(x) = \frac{5}{(x+2)(x-1)}$$

$$b) f_2(x) = |x^2| - 2$$

$$c) f_3(x) = \frac{x+2}{2x-4}$$

$$d) f_4(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + 1}$$

$$e) f_5(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$f) f_6(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

3. Sean  $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$  y  $g(x) = \frac{5}{3x-9}$ , hallar los dominios de las funciones definidas por:

$$a) f + g$$

$$b) f \circ g$$

$$c) f/g$$

4. Determine el dominio de las funciones  $f \circ g$  y  $g \circ f$ , para  $f$  y  $g$  dadas por:

$$a) f(x) = \sqrt{25 - x^2} \text{ y } g(x) = \frac{5}{3x-9}$$

$$b) f(x) = \sqrt{8x - x^2} \text{ y } g(x) = \sqrt{x-1}$$

$$c) f(x) = \frac{x+2}{2x+1} \text{ y } g(x) = \frac{x}{x-2}$$

$$d) f(x) = \sqrt{x+5} \text{ y } g(x) = \frac{1}{1-x}$$

5. Sea  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ .

a) ¿Cuál es el dominio de  $f(x)$ ?

b) Pruebe que  $f$  es decreciente en el intervalo  $(0, 1)$  y creciente en  $(1, \infty)$ .

c) Pruebe que  $f(x) \geq 2$  para todo  $x > 0$ .

d) Muestre que  $f$  es impar para todo  $x$  en el dominio, y deduzca que  $f(x) \leq -2$  para todo  $x < 0$ .

### PRACTICANDO LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

1. Grafique las siguientes funciones, para ayudarse utilice las técnicas vistas en clases (traslaciones, escalamientos, etc)

$$a) \quad 1) y = x$$

$$2) y = 3x$$

$$3) y = 3x + 2$$

$$4) y = -3x + 2$$

$$5) y = |-3x + 2|$$

$$b) \quad 1) y = x^2$$

$$2) y = 2x^2$$

$$3) y = 2x^2 + 3$$

$$4) y = 2((x-4)^2) + 3$$

$$5) y = (2x)^2 + 3$$

$$c) \quad 1) y = |x|$$

$$2) y = |x+2|$$

$$3) y = |x+2| - 3$$

$$4) y = ||x+2| - 3|$$

$$5) y = ||x+2| - 3| + 2$$

$$d) \quad 1) y = x^2$$

$$2) y = ax^2$$

$$3) y = a(x-h)^2$$

$$4) y = a(x-h)^2 + b$$

$$e) \quad 1) y = \sqrt{|x|}$$

$$2) y = \sqrt{|2x|}$$

$$3) y = \sqrt{|2x|} - 3$$

$$4) y = |\sqrt{|2x|} - 3|$$

$$5) y = |\sqrt{|2x|} - 3| - 3$$

- f) 1)  $y = [x]$  (Cajón superior)  
 2)  $y = [\frac{1}{2}x]$   
 3)  $y = [2x]$   
 4)  $y = [\frac{1}{2}x] - 1$   
 5)  $y = |[\frac{1}{2}x] - 1|$   
 6)  $y = |[\frac{1}{2}x] - 1| + 4$   
 7)  $y = [x + 1]$   
 8)  $y = [2x - 2]$
- g) 1)  $y = \frac{1}{x}$   
 2)  $y = \frac{-3}{x}$   
 3)  $y = \frac{-3}{x-3}$   
 4)  $y = \frac{-3}{x-3} + 3$   
 5)  $y = |\frac{-3}{x-3} + 3|$   
 6)  $y = |\frac{-3}{|x|-3} + 3|$

2. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ . Se pide graficar las siguientes funciones:

- a)  $f(x)$   
 b)  $\min\{f(x), 4\}$   
 c)  $f(|x|)$   
 d)  $|f(x)|$   
 e)  $|f(|x|)|$

3. ♣ Se tiene la función:

$$g(x) = \begin{cases} ||x+5| - 5| - 1 & x \leq 1 \\ 2x - 2 & 1 < x < 3 \\ -2(x-3)^2 + 4 & x \geq 3 \end{cases}$$

Grafique  $g(x)$ ,  $g(|x|)$ ,  $|g(x)|$  y  $|g(|x|)|$ .

4. La temperatura medida en grados Fahrenheit ( $F$ ) y en grados Celsius ( $C$ ) satisfacen la ecuación:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

- a) Dibujar el gráfico de dicha ecuación en un sistema de ejes  $F$  y  $C$ .  
 b) Determinar la temperatura que medida en ambas escalas es la misma.  
 c) ¿Qué temperatura en  $F$  corresponde a 2 veces la temperatura  $C$ ?
5. ♣ Considere las siguientes funciones:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 9 & x \leq -2 \\ \frac{-x}{2} & -2 < x < 0 \\ ||x-5| - 5| & x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Aplicando traslaciones y escalamientos de la función  $y = x^2$  obtenga el gráfico de  $f(x)$ . Grafique cada uno de los pasos por separado.  
 b) Grafique  $g(x)$  indicando los puntos de intersección con los ejes y recorrido.
6. Se define la función escalón por:

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- a) Grafique las siguientes funciones:
- $u(x)$
  - $u(-x)$
  - $u(x-2)$  (¿Cómo es el gráfico de  $u(x-a)$ , con  $a > 0$ ?)
  - $u(x+3)$  (¿Cómo es el gráfico de  $u(x+a)$ , con  $a > 0$ ?)
  - $3u(x)$
  - $u(x-4) + u(2-x)$

b) Sean

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 7 \\ 0 & \text{si } x < 7 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ x+6 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{si } x < -64 \\ \pi & \text{si } -64 \leq x < 64 \\ x-22 & \text{si } x \geq 64 \end{cases}$$

Escriba, usando la función escalón  $u(x)$ , las funciones  $g$  y  $h$ ; por ejemplo  $f$  se escribe  $f(x) = x^2 \cdot u(x-7)$ . Grafique las funciones  $f$ ,  $g$ ,  $h$ .

7. a) Construya la función  $f(x) = x^2 + 2x + 3$  a partir de traslaciones de  $x^2$ .  
 b) Grafique cada uno de los pasos por separado (indicando en el último gráfico cortes con los ejes y vértice)  
 c) Encuentre recta que intersecta a  $f$  sólo en el punto  $(0,3)$ . **HINT:** Iguale ecuaciones de recta y parábola.
8. Considere la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:  $f(x) = (x-2)(x+3)$ . Esboce el gráfico de:
  - a)  $f(x)$
  - b)  $f(x-3)$
  - c)  $f(|x|)$
  - d)  $|f(|x|)|$
  - e)  $|f(x-3)| - f(x-3)$
  - f)  $f(|x-3|)$

#### REFORZANDO LAS IDEAS DE BIYECTIVIDAD, FUNCIONES INVERSAS

1. Consideremos las funciones  $f(x) = 7x - 3$  y  $g(x) = 2x - 9$ :
  - a) Hallar  $f \circ g(x)$ .
  - b) Encuentre  $(f \circ g)^{-1}(x)$ .
  - c) Determine  $f^{-1}(x)$ ,  $g^{-1}(x)$ .
  - d) Calcule  $g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ . ¿Le parece conocido?
2. Restringir el dominio de la función  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  a un intervalo donde  $f$  sea creciente y determinar su inversa.
3. Restringir el dominio de  $f(x) = 2(x-4)^2$  a un intervalo donde  $f$  sea decreciente y determinar  $f^{-1}$ .
4. Encuentre la inversa de las siguientes funciones, y explicita el dominio tanto de la función como de su inversa, de manera que estas estén bien definidas:
 

a) $2x + 3$	d) $\frac{x-5}{10}$
b) $x^2 - x + 1$	e) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x+1}$
c) $\sqrt{x^2 - 6}$	f) $\sqrt{ x-6 }$
5. Sea  $f: ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{x+1}{|x|+1}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
  - a) Pruebe que  $f$  no es inyectiva.
  - b) Sea  $g: [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Demuestre que  $g$  es inyectiva.
  - c) Restringa la imagen de  $g$  para obtener una función biyectiva. Calcule su inversa.
6. Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\forall x \in \mathbb{R}: f(f(x)) = x - 1$ . Probar que  $f$  es biyectiva.

7. ♣ Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \geq 0 \\ x + b & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Demuestre que:

- $f$  inyectiva ssi  $a \leq b$
- $f$  epiyectiva ssi  $a \geq b$
- Para el caso en que  $f$  es biyectiva, encuentre la inversa.

### PROBLEMAS GENERALES

- ♣ Denotemos por  $\mathbf{Z}$  el conjunto de números enteros. Sea  $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$  tal que  $\forall m, n \in \mathbf{Z}: [f(m+n) = f(m) + f(n)]$ . Pruebe que:
  - $f(0) = 0$ .
  - $f(-m) = -f(m)$  para todo  $m \in \mathbf{Z}$ .
  - $f$  es inyectiva ssi  $\forall m \in \mathbf{Z}: [f(m) = 0 \Leftrightarrow m = 0]$ .
- ♣ Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferente de la función nula, tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: ([f(x+y) = f(x) + f(y)] \wedge [f(xy) = f(x)f(y)]).$$

- Probar que  $f(0) = 0$  y que  $f(1) = 1$ .
  - Calcular  $f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbf{Z}$  y  $x \in \mathbf{Q}$ .
  - Probar que si  $x \geq 0$ , entonces  $f(x) \geq 0$ . Deducir que  $f$  es creciente.
- Considere la función constante  $f: A \rightarrow B$  tal que  $f(a) = b \in B$  para todo  $a \in A$ . Muestre que:
    - $f$  será sobreyectiva ssi  $B = \{b\}$ .
    - $f$  será biyectiva ssi  $A$  y  $B$  tienen sólo un elemento.
  - Supongamos que  $f: A \rightarrow B$  es una función entre dos conjuntos finitos, donde  $A$  tiene  $n$  elementos y  $B$  tiene  $m$  elementos.
    - Verifique que para que  $f$  sea sobreyectiva es necesario pero no suficiente que  $n \geq m$ .
    - Verifique que para que  $f$  sea inyectiva es necesario pero no suficiente que  $n \leq m$ .
  - Demstrar que la operación composición de funciones es asociativa pero no es conmutativa, es decir:

Dadas  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$  y  $h: C \rightarrow D$  tres funciones arbitrarias. Pruebe que se tiene

    - Asociatividad:  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .
    - No hay conmutatividad: existen  $f, g$  tales que  $g \circ f \neq f \circ g$ .
  - Sean  $f: A \rightarrow B$  y  $g: B \rightarrow C$  funciones. Demostrar que:
    - Si  $f$  y  $g$  son inyectivas, entonces  $g \circ f$  es inyectiva.
    - Si  $f$  y  $g$  son sobreyectivas, entonces  $g \circ f$  es sobreyectiva.
    - Si  $g \circ f$  es sobreyectiva, entonces  $g$  es sobreyectiva.
    - Si  $g \circ f$  es inyectiva, entonces  $f$  es inyectiva.
  - Sean  $f: A \rightarrow B$  una función. Entonces
    - $f$  es inyectiva ssi para todo conjunto no vacío  $C$ , y para todo par de funciones  $g, h: C \rightarrow A$ , se tiene que  $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$ .
    - $f$  es sobreyectiva ssi para todo conjunto no vacío  $C$ , y para todo par de funciones  $g, h: B \rightarrow C$ , se tiene que  $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$ .

PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LAS FUNCIONES A LA VIDA DIARIA

- El puntaje de una prueba de 30 items se calcula asignando 3 puntos por respuesta correcta, restando 1 punto por cada respuesta incorrecta, más 10 puntos de base. Hallar la función  $P(x)$  que representa el puntaje para alguien que responde toda la prueba y tiene  $x$  items correctos.
- En un lago se introdujeron 500 ejemplares de una especie de pez y se sabe que al cabo de  $t$  meses la población de peces está dada por

$$P = \frac{1500}{1 + 2 * 10^{-\frac{t}{5}}}$$

- Indicar si la población de peces está creciendo o se está extinguiendo. Justifique.
- ¿Cuál es la población al cabo de 5 meses?.
- Determinar la función que permite calcular el tiempo  $t$  en meses para que la población alcance un número dado de peces y determinar en cuantos meses la población sera de 2000 peces.

**Indicación:** Utilice  $\log_{10}$ .

- La temperatura  $T$  (medida en  $^{\circ}C$ ) de un objeto está dada, como función de cada instante de tiempo  $t$  (medido en horas), por

$$T = 21 * 2^{-0,4t} + 15$$

- La temperatura, ¿está aumentando o disminuyendo?
- ¿Cuál es la variación de temperatura desde el instante inicial y 30 minutos después?.
- Determinar la función que permite calcular el tiempo transcurrido desde el instante inicial para que la temperatura cambie en una cantidad conocida en  $^{\circ}C$ , y calcule el tiempo que debe transcurrir (desde el inicial) para que la temperatura baje en  $9^{\circ}C$ .

**Indicación:** Utilice  $\log_2$ .

- El estiramiento  $x$  que experimenta un resorte al verse sometido por una fuerza  $F$  sigue la siguiente ley lineal:

$$F = kx \quad \text{ley de Hooke}$$

donde  $k$  es una constante que depende de la dureza de cada resorte. Supongamos que tenemos dos resortes con distinta dureza. A uno se le aplica una fuerza  $F$  y se estira una cantidad  $a$ . Al otro se le aplica la misma fuerza  $F$  y se estira una cantidad  $2a$ . Ahora bien, si al primero se le aplica una fuerza  $F$  y se estira una cierta cantidad. ¿Qué fuerza hay que aplicarle al segundo resorte (en términos de  $F$ ) para que éste se estire la misma cantidad?.

- El grupo de música étnica **Los Chamanes** ha dado dos conciertos en Chile. En el primero, el precio de la entrada fue de  $x = 4$  \$ US y asistieron  $y = 160$  espectadores. En el segundo, el precio fue de  $x = 15$  \$ US y asistieron  $y = 50$  espectadores.

La recaudación  $R$  de un concierto cuya entrada vale  $x$  \$ US y asisten  $y$  espectadores está dada por  $R = xy$ . De este modo, en el primer concierto,  $R = 640$  \$ US y en el segundo  $R = 750$  \$ US. El grupo **Los Chamanes** quiere dar un tercer concierto, para lo cual le pide ayuda a usted con el fin de determinar el precio  $x^*$  que le permite obtener la recaudación máxima.

Para ello siga los siguientes pasos:

- Sabiendo que la asistencia  $y$  es una función lineal de  $x$ , es decir,  $y(x) = mx + b$ , encuentre  $m$  y  $b$ . Grafique  $y(x)$ .
- Usando la parte anterior, verifique que la recaudación  $R$  en función del precio  $x$  está dada por:

$$R(x) = 200x - 10x^2$$

- Grafique la parábola  $R(x)$  indicando sus raíces y vértice.

- d) De la parte anterior deduzca el precio  $x^*$  que proporciona la recaudación máxima. ¿Cuál es la máxima recaudación? ¿Cuántos espectadores asistirían a este precio?
6. El protector de pantalla de su computador es un círculo que se amplía con el tiempo. El círculo comienza como un punto en el centro de la pantalla y se expande hacia fuera, cambiando de colores mientras que crece. Con 21 pulgadas de pantalla, usted tiene un área de visión de radio 10 pulgadas (medido desde el centro diagonalmente hasta una esquina). El círculo alcanza las esquinas en cuatro segundos. Exprese el área del círculo (descontando las regiones cortadas por los bordes del área de visión) en función del tiempo  $t$  en segundos.
  7. Un rectángulo tiene su base en el eje  $OX$  y sus dos cimas superiores en el gráfico de  $y = 9 - x^2$ . Si la cima superior-derecha tiene coordenadas  $(x,y)$ , exprese el área del rectángulo en función de  $x$ .
  8. Un triángulo rectángulo tiene sus vértices en el origen y en los puntos  $(0,y)$  y  $(x,0)$  (con  $y$  positivo). Si la hipotenusa del triángulo pasa a través del punto  $(3,5)$ , exprese el área del triángulo en función de  $x$ .
  9. Una pista atlética tiene la forma de una región rectangular con regiones semicirculares en cada extremo. Si el perímetro de la pista es 400 metros, exprese el área del campo encerrado en función del radio de los semicírculos.