

Enunciado Auxiliar 10 - Matemática II

Escuela de Verano, Universidad de Chile

19 de Enero 2009

Profesor Cátedra: José Zamora

Profesores Auxiliares: Rodrigo Chi - Francisco Unda - Matías Godoy

Pregunta 1. Se dice que una función f es *estrictamente creciente* si: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ se tiene $f(x) < f(y)$. Demuestre que toda función estrictamente creciente es inyectiva.

Pregunta 2. Sean $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definidas por $f(n) = 2n + 1$ y $g(n) = n^2 + 1$:

- a) Determine si f y g son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.
- b) Determinar $f \circ g$ y $g \circ f$
- c) Calcule $(g \circ f)(A)$ con $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Pregunta 3. Considere las funciones $f, g : A \rightarrow B$ con $A, B \neq \emptyset$ y f inyectiva. Se define $\varphi : A \rightarrow B \times B$ como $\varphi(x) = (f(x), g(x))$ para cada $x \in A$.

Pruebe que φ es inyectiva.

Indicación: Recuerde que $(a, b) \neq (c, d) \Leftrightarrow [(a \neq c) \vee (b \neq d)]$

Pregunta 4. Sean $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ y $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ funciones definidas en cada $x \in \mathbb{Z}$ como $f(x) = 1 - x$, $g(x) = -x - 1$ y $h(x) = x + 2$:

- a) Verifique que f, g, h son invertibles (es decir, para cada una calcule $(f \circ f^{-1})$ y $(f^{-1} \circ f)$ y note que los dominios y recorridos son los apropiados (de un ejemplo de una función similar donde esto falle))
- b) Pruebe que $h \circ g \circ f = g \circ f \circ h = id_{\mathbb{Z}}$
- c) Deduzca que $f^{-1} \circ g^{-1} = h$

Pregunta 5. Sea la función $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 11$. Determine A y B de modo que f sea biyectiva, luego, calcule f^{-1}

Indicación: Una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ es simétrica respecto a la recta de ecuación $x = \frac{-b}{2a}$

Pregunta 6. Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$ Es decir, los elementos de $\mathcal{F}$ son funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ dada por:

$$\Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

- a) Justifique el hecho que $\forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$. $\Psi(f, g) \in \mathcal{F}$.
- b) Pruebe que Ψ es sobreyectiva, pero no inyectiva.
- c) Demuestre que para todo par $(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ se tiene:

$$\Psi(\Psi(f, g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})) = id_{\mathbb{R}}$$

- d) Sean $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathcal{F}$ definidas por: $f_1(x) = 2x + 3$, $g_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 5x^3 + 4$ y $g_2(x) = \frac{x}{2}$. Considere el conjunto $A = \{(f_1, g_1), (f_2, g_2)\}$ Determine $\Psi(A)$