

## Enunciado Auxiliar 9 - Matemática II

Escuela de Verano, Universidad de Chile

16 de Enero 2009

Profesor Cátedra: José Zamora

Profesores Auxiliares: Rodrigo Chi - Francisco Unda - Matías Godoy - Orlando Rivera

**Pregunta 1.** Mediante un uso apropiado del Teorema del binomio determine:

- El término que ocupa el lugar 50 en el desarrollo de  $\left(x^3 + \frac{2}{y^2}\right)^{69}$
- Si el segundo término de un desarrollo de la potencia de un binomio es:  $\binom{12}{1}x^{11} \cdot \frac{1}{2}y$  determine el penúltimo término y el binomio con su potencia asociada.
- El término que contiene a  $x^{43}$  en el desarrollo de  $\left(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x}\right)^{30}$ , además, determine el término completo.
- Es posible encontrar un término que contenga a  $x^3$  en el desarrollo de  $\left(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x^4}\right)^{10}$ ? De no ser posible, argumente tanto por inspección como por uso del Teorema del Binomio.

**Pregunta 2.** Determine el valor de las siguientes sumas:

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k$
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$

**Pregunta 3.** Estudie la función  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  determinando dominio, recorrido, inyectividad y sobreyectividad, finalmente esboce un gráfico aproximado.

**Pregunta 4.** Determine si las siguientes funciones son inyectivas:

- $f(x) = mx + n$  con  $m \neq 0, n \in \mathbb{Z}$
- $f(x) = x^2 + x$  con  $x \in (0, +\infty)$ , qué ocurre si  $x \in \mathbb{R}$ ?
- $f(x) = x^n$  con  $n$  un número par.
- $f$  una función que satisface  $f(f(x)) = x - 1$

**Pregunta 5.** El objetivo de este problema es probar que una función definida por partes por funciones biyectivas no necesariamente es biyectiva, para ello considere los siguientes pasos:

- Pruebe que la función  $f(x) = 3 - 2x$  es biyectiva
- Pruebe que la función  $g(x) = \frac{x}{2} - 2$  es biyectiva
- Definiendo la función

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{para } x \leq 2 \\ g(x) & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

Muestre que  $h(x)$  definida de esta manera, a pesar de estar definida por funciones biyectivas, esta no lo es.