Resumen Control 2 - Matemática II
Escuela de Verano, Universidad de Chile

15 de Enero 2009

Profesor Cátedra: José Zamora

Profesores Auxiliares: Rodrigo Chi - Francisco Unda - Matías Godoy - Orlando Rivera

Teoría de Conjuntos

Importante: La Teoría de Conjuntos posee un gran similitud con la lógica proposicional que ya estudiamos. No olvidar que para todo x si:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$$

Dado esto, podemos establecer similitudes con las tautologías ya conocidas:

Ej: Sean $p(x) : x \in A$ y $q(x) : x \in B$ de modo que la afirmación $p(x) \Rightarrow q(x)$ es siempre válida para todo x . Notemos que si $p(x) \Rightarrow q(x)$ es cierta, entonces $A \subseteq B$. De igual forma, sabemos que la equivalencia $[p(x) \Rightarrow q(x)] \Leftrightarrow [\overline{q(x)} \Rightarrow \overline{p(x)}]$ es una tautología. De esto último deducimos que $B^c \subseteq A^c$.

Algunas Definiciones y Propiedades (que derivan de tautologías ya conocidas).

- $A \setminus B = A \cap B^c$
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- $(A \cap B) \subseteq A$
- $A \subseteq (A \cup B)$
- $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$
- $A \subseteq (A \cup B)$
- $A \setminus B = A \cap B^c$

Inducción

Sea $p(n)$ una proposición abierta la cual debemos probar que cierta $\forall n \in \mathbb{N}$.

Paso 1 - Caso Base: Probar que la afirmación es cierta para $p(1)$ (o el menor valor posible que pueda obtener n).

Paso 2 - Hipótesis de Inducción: Asumamos que $p(n)$ es cierta.

Paso 3 - Paso Inductivo: Debemos demostrar que $p(n) \Rightarrow p(n+1)$, es decir, demostrar usando nuestra hipótesis inductiva (paso 2) que $p(n+1)$ también es cierta.

Sumatorias

Recordar siempre que: $\sum_{i=0}^n a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

De este modo, la sumatoria tiene algunas propiedades (demostrables por inducción) con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$:

- $\sum_{i=m}^n \alpha \cdot a_i = \alpha \cdot \sum_{i=m}^n a_i$
- $\sum_{i=m}^n a_i + b_i = \sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=m}^n b_i$
- $\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k}$
- $\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=0}^n a_i - \sum_{i=0}^{m-1} a_i$
- $\sum_{i=m}^n a_{i+1} - a_i = a_{n+1} - a_m$
- $\sum_{i=1}^n \alpha = n \cdot \alpha$

Algunas Sumas Importantes:

- $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{i=0}^n 2i - 1 = n^2$

¡¡Mucha Suerte en su Control 2!!