

Enunciado Auxiliar 8 - Repaso Control 2 - Matemática II

Escuela de Verano, Universidad de Chile

15 de Enero 2009

Profesor Cátedra: José Zamora

Profesores Auxiliares: Rodrigo Chi - Francisco Unda - Matías Godoy - Orlando Rivera

Pregunta 1. Definimos $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por: $\Psi_1(x_0, x_1) = x_0 + x_1$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\Psi_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\Psi_n(x_0, \dots, x_n) = \Psi_{n-1}(x_0, \dots, x_{n-1}) + \Psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$$

Pruebe por inducción que: $\Psi_n(x_0, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x_j$

Indicación: Pruebe primero que se tiene la siguiente identidad: $\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}$

Pregunta 2. Demuestre por inducción los siguientes resultados:

- a) $\forall n \in \mathbb{N} \ 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7.
- b) $\forall m \in \mathbb{N} \ 5^{2m+1} + 7^{2m+1}$ es divisible por 6.

Pregunta 3. Determine el valor de las siguientes sumas:

- a) $\sum_{i=1}^n 2^{i+1} \left(\frac{i}{(i+1)(i+2)} \right)$
- b) $\sum_{k=0}^n k \cdot f \left(1 + \frac{1}{k} \right)$ con f una función que satisface: $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ y $f \left(\frac{1}{x} \right) = -f(x)$

Indicación: Puede ser útil determinar el valor de $\sum_{k=1}^n f(k)$

Pregunta 4. Sean A , B , C y D conjuntos. Pruebe los siguientes resultados:

- a) $A \cup (A \cap B) = A$
- b) $A \subseteq C \Rightarrow A \setminus B = C \setminus [B \cup (C \setminus A)]$
- c) $(B \setminus A) \subseteq C \Rightarrow (D \setminus C) \subseteq (D \setminus B) \cup A$
- d) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$

Pregunta 5. Determine el valor de las siguientes sumas:

- a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k$
- b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k+1}$