Enunciado Auxiliar 7 - Matemática II
Escuela de Verano, Universidad de Chile

14 de Enero 2009

Profesor Cátedra: José Zamora
Profesores Auxiliares: Rodrigo Chi - Francisco Unda - Matías Godoy - Orlando Rivera

Pregunta 1. Definimos $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por: $\Psi_1(x_0, x_1) = x_0 + x_1$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\Psi_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ por:

$$\Psi_n(x_0, \ldots, x_n) = \Psi_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) + \Psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$$

Pruebe por inducción que: $\Psi_n(x_0, \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x_j$

Indicación: Pruebe primero que se tiene la siguiente identidad: $\displaystyle\binom{n+1}{j} = \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}$

Pregunta 2. Calcule las siguientes sumas:

a) $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k-1)$ sin usar Inducción.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ con f una función que satisface: $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ y $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$

Pregunta 3. El objetivo de este problema es determinar la siguiente suma: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$

Para ello se proponen los siguientes pasos:

a) Demuestre, vía suma telescópica que: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

b) Desarrolle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}[(k+1)^3 - k^3]$ de dos formas distintas

c) En base a las partes anteriores, concluya que: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Pregunta 4. Dado que n es un entero positivo, determinar el valor de n que satisface la ecuación

$$\frac{n^3-3}{n^3} + \frac{n^3-4}{n^3} + \frac{n^3-5}{n^3} + \frac{n^3-6}{n^3} + \ldots + \frac{5}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \frac{3}{n^3} = 169.$$