Enunciado Auxiliar 6 - Matemática II
Escuela de Verano, Universidad de Chile

13 de Enero 2009

Profesor Cátedra: José Zamora
Profesores Auxiliares: Rodrigo Chi - Francisco Unda - Matías Godoy - Orlando Rivera

Pregunta 1. Demuestre usando inducción que: $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}$

Pregunta 2. Pruebe que el producto de k enteros consecutivos es divisible por $k!$

Pregunta 3. Pruebe por inducción los siguientes resultados:

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ un tablero de $2^n \times 2^n$ al cual se le remueve un casillero puede ser cubierto por triminoes (figura que cubre 3 casilleros, similar a una L)

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ n rectas diferentes que se encuentran en un plano y pasan por un punto en común, dividen al plano en $2n$ partes.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$ La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2) \cdot 180$

d) La sucesión de Fibonacci se define como $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $a_1 = a_2 = 1$. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene: $a_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Pregunta 4. Sean n rectas en el plano, las cuales dividen al plano en R_n regiones, algunas no acotadas. Pruebe que es posible colorear estas regiones, donde dos regiones adyacentes (que comparten un segmento) tienen distinto color, usando dos colores.

Pregunta 5. Consideremos n circunferencias en el plano. Estas dividen el plano en partes o regiones. Muestre que se puede colorear el plano con dos colores, de modo que no haya dos partes con alguna frontera en común y que estén pintadas de un mismo color.

Pregunta 6. Se considera la sucesión recurrente definida por:

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2, \quad a_1 = 14$$

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, el número: $\sqrt{2(a_n^2 - 4)}$ Es divisible por 4.

Pregunta 7. Definimos $\Psi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por: $\Psi_1(x_0, x_1) = x_0 + x_1$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\Psi_n : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ por:

$$\Psi_n(x_0, \ldots, x_n) = \Psi_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) + \Psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$$

Pruebe por inducción que: $\Psi_n(x_0, \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x_j$