Enunciado Auxiliar 5 - Matemática II
Escuela de Verano, Universidad de Chile

12 de Enero 2009

Profesor Cátedra: José Zamora
Profesores Auxiliares: Rodrigo Chi - Francisco Unda - Matías Godoy - Orlando Rivera

Pregunta 1. *Diferencia Simétrica*
Se define la operación **Diferencia Simétrica** entre los conjuntos A y B, la cual se nota como $A\triangle B$ del siguiente modo:

$$A\triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

El objetivo de este problema es demostrar que: $A\triangle B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$, para ello se proponen los siguientes pasos:

a) Pruebe que $(A \setminus B) = (A \cap B^c)$
b) Pruebe que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
c) Pruebe que $A \cup A^c = U$ donde U denota el conjunto universo.
d) Pruebe que $(A \cap B)^c = (A^c \cup B^c)$
e) Ocupando los pasos anteriores concluya lo deseado.

Pregunta 2. Sean A, B y C conjuntos, subconjuntos de un universo U. Pruebe que:

$$(A \cap B) \subseteq C \Rightarrow (A \cap C^c) \subseteq B^c$$

Pregunta 3. Sean $A, B, C \subseteq U$. Pruebe que:

a) $(A\triangle B) \cup (B\triangle C) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$
b) $A\triangle C \subseteq (A\triangle B) \cup (B\triangle C)$

Pregunta 4.

a) Sean E,F conjuntos. Demuestre que

$$E = [(E \cup F) \setminus F] \cup (E \cap F)$$

b) Sean A,B subconjuntos de U (universo), demuestre que:

$$X \cup A = Y \cup A \wedge X \cap A = Y \cap A \Leftrightarrow X = Y$$

Indicacion: Use la parte a)

Pregunta 5. Sea $B \subseteq U$, demuestre que:

$$(\forall A \subseteq U)(A \cup B = A) \Rightarrow B = \emptyset$$

Pregunta 6. Sean A, B, C y D conjuntos, demuestre que:

$$(B \setminus A) \subseteq C \Rightarrow (D \setminus C) \subseteq (D \setminus B) \cup A$$

Pregunta 7. Sean A, B y C conjuntos, demuestre que:

a) $A\triangle B = A\triangle C \Leftrightarrow B = C$
b) $A\triangle B = C \Leftrightarrow B = A\triangle C$

Pregunta 8. *Propiedades Conjunto Potencia*
Sea $A \subseteq U$ y $A \neq \emptyset$. Se define $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{P}(U)$ como

$$X \in \mathcal{F}_A \text{ sí y sólo sí } X \subseteq U \text{ y } X \cap A \neq \emptyset$$

Demuestre que dado $B \subseteq U$:

1. $U \in \mathcal{F}_A$ y $A \in \mathcal{F}_A$
2. Si $A \setminus B \neq \emptyset \Rightarrow B^c \in \mathcal{F}_A$
3. Si $B \in \mathcal{F}_A \wedge C \subseteq U \Rightarrow (B \cup C) \in \mathcal{F}_A$

Pregunta 9. Se define la operación entre conjuntos $\circledast$ del siguiente modo: $A \circledast B = A^c \cap B^c$. Considere un universo U, y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(U)$ un conjunto no vacío tal que $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \circledast B \in \mathcal{F}$, a partir de lo anterior, demuestre que:

a) $A^c \in \mathcal{F}$
b) $A \cap B \in \mathcal{F}$
c) $A \cup B \in \mathcal{F}$
d) $A \triangle B \in \mathcal{F}$
e) $\emptyset \in \mathcal{F} \wedge U \in \mathcal{F}$

Desafío 1: Sean A, B subconjuntos de un universo U, y $\mathcal{P}(A)$ $\mathcal{P}(B)$ sus respectivos conjuntos potencia, demuestre que:

a) $A = B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$
b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \vee B \subseteq A)$