ESCUELA DE VERANO 2009 - MATEMÁTICAS II

Profesores: Raúl Uribe, Pierre Paul Romagnoli, Leonardo Sánchez, José Zamora.

GUÍA # 4 : Límites y Derivadas

Límites

P1.- Realizar el gráfico de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Con la ayuda del gráfico, determinar el valor de los siguientes límites (si es que existen):

(i) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

P2.- Realizar el gráfico de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ x+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Con la ayuda del gráfico, determinar el valor de los siguientes límites (si es que existen):

(i) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

P3.- Considere la función $g(x) = \sin(\frac{\pi}{2x})$

(i) Evalúe g en los siguientes valores: $x = 1$, $x = 0{,}5$, $x = 0{,}1$, $x = 0{,}01$

(ii) ¿Se puede afirmar que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$?. Justifique su respuesta. Encuentre un número α menor que los dados en el punto anterior tal que $g(\alpha) = 1$.

(iii) Si se fija un número cualquiera (digamos δ), ¿se pueden encontrar dos números β y γ, más cerca de 0, es decir $0 < \beta < \gamma < \delta$, tal que $g(\beta) = 0$ y $g(\gamma) = 1$?.

P4.- Encuentre el valor de:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x$

(ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(3+x)^2-9}{x}$

P5.- Encuentre el valor de:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} x^2+5x-9$

(ii) $\lim\limits_{x\to 5} x^2-50x+25$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} e^x(x+2)$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x-5}}{5}+25$

(v) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+e)\sin(x+\frac{\pi}{2})}{e^x}$

P6.- Encuentre el valor de los siguientes límites (si es que existen):

(i) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x^2-9}{x-3}\right)^3$

(ii) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$

(iii) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{3h^2}}{h}$

(iv) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$

(v) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$

(vi) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

(vii) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$

(viii) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+2}{x^2+2x+3}$

(ix) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3}{-x+1}$

(x) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+1}{x-3}$

Derivadas

P7.- Calcule mediante la definición la derivada de las siguientes funciones:

(i) $f(x) = 4x-3$

(ii) $h(z) = z^2+2$

(iii) $f(x) = 2x^2+3x$

(iv) $g(y) = 3\cos y$.

Indicación: utilice que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

P8.- Derive directamente las siguientes funciones:

(i) $f_1(x) = 5x^3-2x$

(ii) $f_2(t) = 7t^5+\sin t-8$

(iii) $f_3(y) = 3\ln y - 7e^y + 3y^{18}$

(iv) $f_4(x) = 2\sin x + 4\cos x$

(v) $f_5(x) = e^x \ln x$

(vi) $f_6(x) = (x^2+3x)\sin(x^3)$

(vii) $f_7(x) = \dfrac{\cos x}{e^x-5x}$

(viii) $f_8(x) = \tan(x)\ln(x^2)(x^3+1)$

(ix) $f_9(x) = (\cos(x^n))^n + (\sin(x^k))^k$

(x) $f_{10}(x) = exp(\sqrt{\frac{1}{x^2}+ax})$, donde $a > 0$

P9.- Encuentre a y b para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$ y calcule la derivada:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ ax+b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿Es $f'(x)$ continua en $\mathbb{R}$? ¿Es derivable $f'(x)$?

P10.- Encuentre a y b para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$ y calcule la derivada:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2+ax+b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¿Es $f'(x)$ continua en $\mathbb{R}$? ¿Es derivable $f'(x)$?

P11.- Deduzca la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 - 8x + 9$ en el punto $(3, -6)$

P12.- Deduzca la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $f(x) = \ln x + x^3$

P13.- Considere un móvil que se mueve sobre una linea recta, donde la distancia (en metros) al origen está dada por la función $x(t) = t^4 + e^t - 5$, donde t representa el tiempo medido en segundos. Utilzando que la derivada de la función $x(t)$ representa la velocidad del móvil, encuentre la velocidad de éste en el instante $t = 0{,}002s$.

P14.- Para la función $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{17}{3}$, encuentre el dominio, asíntotas, puntos críticos, zonas de crecimiento, zonas de decrecimiento y grafique.

P15.- Para la función $h(x) = x + 2 + \frac{1}{x-2}$, encuentre el dominio, asíntotas, puntos críticos, zonas de crecimiento, zonas de decrecimiento y grafique.

P16.- Para la función $s(x) = \frac{x^2+2}{1-x^2}$, encuentre el dominio, asíntotas, puntos críticos, zonas de crecimiento, zonas de decrecimiento y grafique.

P17.- Se desea hacer una ventana rectangular cuyo borde superior sea semicircular. Sólo se dispone de 7 metros del material necesario para el marco. El objetivo de este problema es encontrar el ancho del marco que maximiza el área del ventanal.

(i) Encuentre el área del ventanal en función de su ancho.

(ii) Haga un bosquejo área v/s ancho. ¿Qué tipo de curva se forma?

(iii) Encuentre el valor de la variable asignada al ancho para el cual se obtiene la mayor superficie. Calcule el valor de esa área máxima.

P18.- Hace algunos días la NASA detectó un meteorito que podría chocar en los próximos días con la tierra. Aquí en Chile un importante astrónomo logró descubrir la ecuación de la distancia meteorito-centro de la tierra en función del tiempo. Lamentablemente él muere, pero milagrosamente ha dejado la ecuación para su estudio posterior. Tal ecuación es: $x(t) = 2t^3 - 156t^2 + 146960$Km, donde el tiempo se mide en horas y se considera tiempo inicial ($t = 0$) a las 12:00 horas del día Jueves 20 de Enero del 2005.

(i) ¿A qué distancia del centro de la Tierra se encuentra el meteorito el Jueves a las 12:00?

(ii) Indique el día y la hora en que el meteorito estará más cerca del centro de la tierra.

(iii) Considerando que el radio de la Tierra es 6350 Km. ¿Nos impactará el meteorito?. De no ser así ¿Cuál será la mínima distancia entre el meteorito y la superficie?.

P19.- Existen supuestos que afirman que, en sus buenos tiempos, Macondo llegó a tener un parque de diversiones con una monta'na rusa llamada "Buen día Alegría". Un tramo de esta monta'na rusa tuvo (eventualmente) por ecuación a la función $g(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

(i) Encuentre $g'(x)$

(ii) Encuentre las coordenadas del punto de la monta'na rusa que posee mayor pendiente.

(iii) Encuentre la ecuación de la recta tangente al punto calculado en (ii).

P20.- Calcule las dimensiones del mayor cono (cono de mayor volumen) que se puede circunscribir a una esfera de radio R.

P21.- Un granjero quiere construir dos corrales rectangulares adyacentes. Por su granja pasa un río por lo que, para mantener a sus animales con un suministro constante de agua fresca, decide construir ambos corrales con un lado sin cerco que de al río. Si posee sólo $40m$ del material necesario para el enrejado, ¿cuáles son las dimensiones de los corrales que maximizan la superficie encerrada?. ¿Influye de alguna forma la ubicación que se le de al cerco de separación entre ambos corrales?

P22.- Se desea construir una caja sin tapa y de base cuadrada. Para ello se dispone de un cuadrado de cartón (de lado 1) al cual se le hacen, en sus cuatro esquinas, cortes cuadrados (de lado x). Determine el corte que maximiza el volumen de la caja resultante.

P23.- Se desea construir una base cuadrada de volumen $12m^3$. El cartón para las bases cuesta 3 el m^2 y el de las paredes laterales cuesta 2 el m^2.

(i) Encuentre la función costo que, para cada caja de altura h y base de lado a, entrega el precio de la construcción.

(ii) Exprese la función de costo sólo en términos de la variable a.

(iii) Encuentre el valor de a que minimiza el costo de la caja y encuentre ese precio.

P24.- Deduzca las coordenadas del vértice de una parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$

P25.- Sea $f,\ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumplen lo siguiente:

1. $g(x) = xf(x) + 1$ y $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$
2. $g(a+b) = g(a)g(b)$

Demuestre que $g'(x) = g(x)$

Aproximación de Taylor

P26.- Considere la función $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Encuentre la aproximación de Taylor de segundo grado para esta función en torno a 0 y a 1. Comente sus resultados.

P27.- Use la aproximación de Taylor de tercer grado en torno a 0 y a 1 para la función $h(x) = x^4 + 2x$. Con la ayuda de una calculadora obtenga el valor de h en $x = 0{,}001$ y compare este valor con los entregados por las aproximaciones anteriores.

P28.- Considere la función $y(x) = \cos x$. Encuentre la aproximación de Taylor de segundo orden en torno a $x_0 = 0$. Luego grafique la función y su aproximante en el intervalo $[-2, 2]$ y vea qué sucede. ¿Qué pasa si se agranda o se achica el intervalo? ¿Sigue sirviendo la aproximación?. Ayúdese de alguna herramienta gráfica (calculadora o un computador).

P29.- Evaluar aproximadamente $\cos(69°)$. Para ello trabaje en radianes y utilice una aproximación de Taylor de tercer orden en torno a $\frac{\pi}{3}$.

P30.- Evaluar aproximadamente $\cos(32°)$. Para ello trabaje en radianes y utilice una aproximación de Taylor en torno a un punto conveniente.

P31.- ¿Puede existir una función continua (sin saltos), que tenga derivada en todo punto y que cumpla las siguientes condiciones $f(0) = 0$, $f(2) = 4$ y $f'(x) \leq 2 \ \forall x$?

P32.- El siguiente problema tiene como objetivo probar que el polinolio $p(x) = x^5 + 10x + 11$ tiene sólo una raíz real.

(i) Encontrar (por simple inspección) una raíz real del polinomio

(ii) Suponga que existe un real α distinto del encotrado anteriormente que es raíz del polinomio. Aplique el teorema del valor medio.

(iii) Calcule directamente la derivada del polinomio. Se anula tal derivada en algún punto?

(iv) ¿Puede existir α? Justifique.