ESCUELA DE VERANO 2009 - MATEMÁTICAS II

Profesores: Raúl Uribe, Pierre Paul Romagnoli, Leonardo Sánchez, José Zamora.

GUÍA # 3 : Funciones Especiales

Funciones Polinomiales

1. Considere los siguientes polinomios: $p(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^2 - 3$, $q(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x$ y $r(x) = 4x^3 - x^2 + x$. Determine la ecuación de los polinomios $p+q, q-p, p \cdot q + r, (p+q)\cdot(p-q)$.

2. Resuelva la ecuación $x^2 + 16 + \sqrt{x^2+16} - 20 = 0$.

3. Exprese el polinomio $p(x) = x^3 - 6x^2 + 14x - 9$ en potencias de $(x-2)$.

4. Exprese el polinomio $p(x) = 4x^5 - 6x^4 + 3x^2 + x^2 - x - 1$ en potencias de $(x-1)$.

5. Determinar los valores de a y b que satisfacen para cualquier $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$ la ecuación:
$$\frac{5x+1}{x^2+x-6} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-2}$$

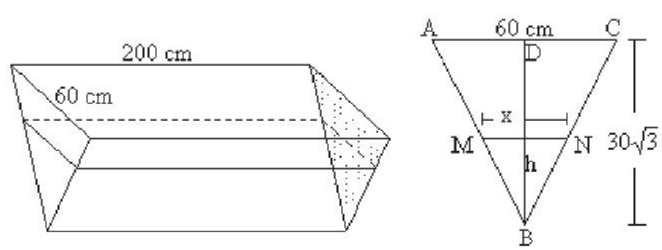
6. Hay que repartir \$ 60.000 entre cierto número de amigos, presentes en una reunión, de manera exacta entre ellos. Alguien nota que si hubieran dos amigos menos, a cada uno le tocaría \$ 2.500 más. ¿Cuántos son los amigos presentes y cuánto le toca a cada uno?.

7. Un número está compuesto de dos cifras; si se le agrega 9, se encuentra el mismo número invertido, y si se divide el número por el producto de las dos cifras, se obtiene 6 como cociente. Halle el número.

8. La edad de un niño será dentro de 3 años un cuadrado perfecto y hace 3 años que su edad era precisamente la raíz de este mismo cuadrado. ¿Qué edad tiene el niño?

9. Si $p(x)$ es un polinomio tal que $p(x^2+1) = x^4 + 5x^2 + 3$ calcule $p(x^2-1)$.

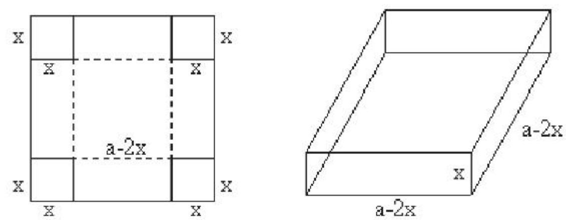
10. Un abrevadero que está lleno de agua tiene 2 mts. de largo y sus extremos tienen la forma de triángulos equiláteros invertidos de 60 cm. de lado. ¿Cuál es el volumen de agua en el abrevadero?



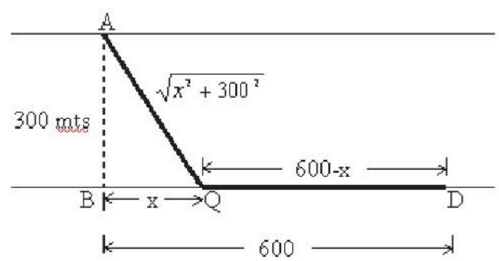
Si al abrevadero se le abre un orificio en el fondo y el agua se escapa a una razón dada. Exprese el volumen en un instante dado posterior en función:

- De la base del triángulo.
- De la altura del triángulo.

11. Se dispone de una cartulina cuadrada de lado a y se quiere hacer una caja sin tapa recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando sus lados (Ver figura). Exprese el volumen de la caja en función del lado del cuadrado recortado.



12. Los puntos A y B están situados uno frente al otro y en lados opuestos de un río recto de 300 mts. de ancho. Los puntos Q y D están respectivamente y en la misma orilla de B a x mts. y a 600 mts. (Ver figura). Una compañía de teléfonos desea tender un cable desde A hasta D pasando por Q. Si el costo por metro de cables es de $\frac{5k}{4}$ pesos bajo el agua y de k pesos por tierra; exprese el costo total como una función de x. ¿Cuál es el dominio de la función costo?.



13. Grafique las siguientes funciones (sobre su dominio máximo) indicando cortes con los ejes, zonas de crecimiento (y decrecimiento):

   a) $x^2 - 2x + 1$
   b) $x^3 + x^2 + x$
   c) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$
   d) $x^3 - x^2 + x$
   e) $8x^5 + 4x^4 - 2x^2$
   f) $\frac{-2}{x^2 + |x| + 1}$
   g) $|x^2 - x|$
   h) $\frac{x^3 - 1}{x - x^2}$
   i) $\frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$
   j) $\max\{x^3 - x^2, 1 + x + x^2\}$
   k) $\frac{|x^2 - 1| - 2x}{(x-1)^2}$
   l) $x^2 \cdot (1 + \frac{1}{x})$

Funciones Exponencial y Logaritmo

1. Encontrar los valores de x que cumplen:

a) $\log_{10}(1000) = x$

b) $\log_4\left(\frac{1}{64}\right) = x$

c) $\log_{27}(x) = -\frac{2}{3}$

d) $x - 3 = \log_2(32)$

e) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$

f) $(3 - \log(x)) \cdot (2 + \log(x)) = 0$

g) $\log_3 x = -1$

h) $\log_x(27) = 3$

i) $\log_3 x + \log_3(x-2) = 1$

j) $x^2 - x = \log_5(25)$

k) $\ln(x+1) + \ln\left(\frac{1}{x-1}\right) = e$

l) $\log\left(\sqrt{\frac{x+6}{x-1}}\right) = \log 2.$

2. Sabiendo que $\log_{10}(2) = 0,301030$ y $\log_{10}(3) = 0,477121$ calcule $\log_{10}(6)$ y $\log_{10}(8)$.

3. Desarrolle el logaritmo (base 10) de $x = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

4. Sabiendo que $\log_2(8) = 3$, calcular $\log 16(8)$.

5. Resolver la ecuación $2\log x = 1 + \log(x - 0,9)$.

6. Usar las propiedades de los logaritmos para escribir las siguientes expresiones como una suma, diferencia o múltiplo de logaritmos:
   a) $\log_5\left(\frac{10}{9}\right)$
   b) $\log_2\left(\frac{x \cdot y}{5}\right)$
   c) $\ln(\sqrt{3x+2})$

7. Escriba cada expresión como un único logaritmo:
   a) $\log_3(x-2) - \log_3(x+2)$
   b) $3\ln(x) + 2\ln(y) - 4\ln(z)$
   c) $2(\ln(x) - \ln(x+1) - \ln(x-1))$

8. Simplifique totalmente las siguientes expresiones:
   a) $\left(\dfrac{\frac{(5^2)^2}{5^{x^2}}}{225 \cdot (5^x)^{x+1}} \cdot \dfrac{\frac{(3^2)^3}{3^{x^2}}}{(3^x)^{x-1}}\right) \cdot \dfrac{5^{x(2x+1)}}{3^{x(1-2x)}}$
   b) $\dfrac{2^n \cdot 4^{n+1}}{3 \cdot 8^n} \cdot \dfrac{9^{2n}}{16} \cdot \dfrac{36}{81^n} \cdot (2^{2n} + 4^n)^{-3}$

9. Sea $a > 0, x > 0$ y además $(7x)^{\log_a 7} - (5x)^{\log_a 5} = 0$. Determine el valor de x.

10. Pruebe que:
$$\frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2}} = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}.$$

11. Si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x + e^{-x}$ demuestre que:
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) \cdot f(x-y) = f(2x) + f(2y).$$

12. Si $x = -a\log(c) + b$ e $y = -a\log(d) + b$ pruebe que:

$$a = \frac{x-y}{\log\left(\frac{d}{c}\right)}, b = \frac{x\log(c) - y\log(d)}{\log\left(\frac{c}{d}\right)}.$$

13. En la escala de Richter, la intensidad M de un terremoto, se relaciona con su energía E (en Ergios) por medio de la fórmula $\log E = 11,4 + 1,5M$.

    Si un terremoto tiene 1000 veces más energía que otro, ¿Cuántas veces mayor es su índice de Richter M ?

    ¿Cuál es la razón de la energía del terremoto de San Francisco, ocurrido en 1906 ($M = 8,3$), con la del Eureka de 1980 ($M = 7$) ?

14. Grafique (sobre su dominio máximo) las siguientes funciones:

    a) $(x-5)\cdot(x)$
    b) e^{-x^2}
    c) $x^2 \cdot e^{5-x}$
    d) $\sqrt{e^{x^2}}$
    e) $e^{\frac{1}{x^2}}$
    f) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-5}$
    g) $e^x - 1 - x - x^2$
    h) $\left(\frac{-1}{2}\right)^x$
    i) $|e^x - e^{-x}|$
    j) $\max\{e^x, e^{-x}\}$
    k) $\max\{e^{x^2}, e^{-x}\}$
    l) $\dfrac{1}{e^{-x^2}}$
    m) $3^x - 2^x$
    n) $\dfrac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x}$
    ñ) $\log(10^x + 1)$
    o) $\left(\dfrac{-1}{3}\right)^x + \left(\dfrac{-1}{2}\right)^x$

15. Dada la función $f(x) = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2}$

    a) Grafique $g(x) = 2^x$ y $h(x) = 2^{-x}$ en un mismo diagrama y deduzca el signo de f.
    b) Demuestre que f es creciente.
    c) Demuestre que f tiene inversa y encuentre expresión explícita.

Funciones Trigonométricas

1. Grafique (sobre su dominio máximo) las siguientes funciones:

    a) $|\operatorname{sen}(x)|$
    b) $|\cos(x)|$
    c) $\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x)$
    d) $\operatorname{sen}(2x) - \cos(2x)$
    e) $\cos^2(x)$
    f) $\cos(|x|)$
    g) $2\cos(x) - \operatorname{sen}(x)$
    h) $2\cos(x) - \operatorname{sen}(2x)$
    i) $\left|\dfrac{1}{\operatorname{tg}(x)}\right|$
    j) $\max\{\operatorname{sen}(x), 0\}$
    k) $\max\{\operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$
    l) $\max\{\cos(x), 0\}$
    m) $\cos(\pi - 2x)$
    n) $x^2 \cdot \operatorname{sen}(x)$
    ñ) $\dfrac{1}{x} \cdot \cos(x)$
    o) $\left(x + \dfrac{1}{x}\right) \cdot \operatorname{sen}(2x)$

2. Encuentre la amplitud y el período de las funciones y bosqueje su gráfico:

   a) $5\,\text{sen}(2\pi x - \pi)$
   b) $-3\,\text{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right)$
   c) $5\,\text{sen}(-2\pi x)$
   d) $4\,\text{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)$
   e) $8\cos^2(2\pi x)$
   f) $-\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

3. Dada la función $f(x) = (2\sqrt{2+\sqrt{2}})\,\text{sen}(3x) + (2\sqrt{2-\sqrt{2}})\cos(3x)$, redúzcala a la forma:
   $$f(x) = A\,\text{sen}(\omega x + \varphi)$$
   Encuentre los valores de A, ω y φ correspondientes. Determine la amplitud, período, ángulo de fase y los puntos donde $f(x)$ corta al eje de las abcisas.

4. Use el círculo unitario para calcular geométricamente $\cos(\frac{\pi}{2})$ y $\cos(\frac{\pi}{4})$.

5. Use las fórmulas del ángulo medio para calcular $\cos(\frac{\pi}{8}), \text{sen}(\frac{\pi}{8})$ y $\cos(\frac{\pi}{16})$.

6. Apóyandose en los cálculos anteriores, deduzca inductivamente que para cualquier $n \in \mathbb{N}:$
   $$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$$

7. Use el círculo unitario para deducir que $|\,\text{sen}(x)| \leq |x|$.

8. Expresar cada uno de los productos siguientes como suma:

   a) $\text{sen}(3x)\cos(5x)$
   b) $\cos(7x)\,\text{sen}(5x)$
   c) $\cos(7x)\cos(5x)$
   d) $\cos(x)\,\text{sen}(\frac{x}{2})$

9. Expresar cada una de las sumas siguientes como producto:

   a) $\text{sen}(\frac{\pi}{9}) + \text{sen}(\frac{2\pi}{9})$
   b) $\text{sen}(\frac{\pi}{4}) - \text{sen}(\frac{\pi}{5})$
   c) $\cos(2x) - \cos(x)$
   d) $\cos(\frac{7\pi}{9}) + \cos(\frac{2\pi}{9})$

10. Demostrar las siguientes identidades:

    a)
    $$\text{sen}^4(x) + 2\,\text{sen}^2(x)\left(1 - \frac{1}{\text{cosec}^2(x)}\right) = 1 - \cos^4(x)$$

    b)
    $$\frac{1+\text{tg}^2(x)}{1+\cot^2(x)} = \left(\frac{1-\text{tg}(x)}{1-\cot(x)}\right)^2$$

    c)
    $$\frac{1-\text{sen}(x)\cos(x)}{(\sec(x)-\text{cosec}(x))\cos(x)} \cdot \frac{\text{sen}^2(x)-\cos^2(x)}{\text{sen}^3(x)+\cos^3(x)} = \text{sen}(x)$$

d)

$$\operatorname{cosec}(x)(\sec(x)-1)-\cot(x)(1-\cos(x))=\operatorname{tg}(x)-\operatorname{sen}(x)$$

e)

$$(\sec(x)-1)^2-\operatorname{tg}^2(x)=(1-\cos(x))^2$$

11. Demostrar que si $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, entonces:

    a)

    $$\cos(\alpha)+\cos(\beta)+\cos(\gamma)=1+4\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

    b)

    $$\operatorname{sen}(\alpha)+\operatorname{sen}(\beta)+\operatorname{sen}(\gamma)=4\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

12. Una escalera de 13,5 metros de longitud llega hasta la parte superior de un muro. Si la escalera forma un ángulo de 60 grados con el muro, hallar la altura de éste y la distancia a él desde el pie de la escalera.

13. Un asta de bandera está enclavada verticalmente en lo alto de un edificio; a 12 m. de distancia, los ángulos de elevación de la punta del asta y de la parte superior del edificio son de 60 y 30 grados respectivamente. Hallar la longitud del asta.

14. Desde la cúspide de un monumento de 30 metros de altura, los ángulos de depresión de dos objetos, que están sobre el terreno en la dirección oeste del monumento son de 45 y 30 grados respectivamente. Hallar la distancia que los separa.

15. Mirando hacia el sur desde la parte superior de un acantilado, los ángulos de depresión de una roca y de una boya se observa que son de 45 y 60. Si se sabe que estos objetos están separados 110 metros. Hallar la altura del acantilado.

16. Desde lo alto de un acantilado de 1500 metros de altura los ángulos de depresión de dos embarcaciones que están situadas al sur del observador son de 25 y 85 grados respectivamente. Hallar la distancia entre esas embarcaciones.

17. Una torre está al pie de una colina cuya inclinación con respecto al plano horizontal es de 9 grados. Desde un punto de la colina 12 metros más arriba la torre subtiende un ángulo de 54 grados. Hallar la altura de la torre.

18. Dos chimeneas AB y CD tienen la misma altura. Una persona que está entre ellas en la recta AC que une sus bases observa que la elevación de la más cercana es de 60 grados. Después de caminar 24 metros en una dirección perpendicular a AC observa que las elevaciones son de 45 grados a la más cercana y 30 grados a la otra. Hallar la altura de las chimeneas y la distancia que las separa.

19. Se tiene un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r. Demostrar que el perímetro y el área de este polígono son respectivamente:

    $$2nr\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right),\frac{1}{2}nr^2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$