Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas U. de Chile Escuela de Verano 2008

Pauta Control 3, 2006
Matemáticas II

Verano 2008

Problema 1

Considere el polinomio $f(x) = x^4 - 5x^3 - px^2 + 8x - q$

(a) Determine los valores de p y q tal que $f(x)$ sea divisible por $(x^2 + x)$

(b) Para los valores de p y q encontrados en la parte (a), determine las raíces de f

(c) Bosquejar el gráfico de f, indicando en forma clara las zonas donde f es positiva y donde es negativa.

Sol Prob. 1

(a) Recordemos que $f(x)$ es divisible por $(x^2 + x) \Leftrightarrow$ al hacer el cuocientes entre $f(x)$ y $(x^2 + x)$ el residuo es 0.

$$
\begin{array}{l}
x^4 - 5x^3 - px^2 + 8x - q : x^2 + x = x^2 - 6x + (6 - p) \\
-\underline{(x^4 + x^3)} \\
\quad - 6x^3 - px^2 + 8x - q \\
\quad - \underline{(-6x^3 - 6x^2)} \\
\qquad (6 - p)x^2 + 8x - q \\
\qquad - \underline{((6 - p)x^2 + (6 - p)x)} \\
\qquad\qquad (2 + p)x - q = r(x)
\end{array}
$$

Imponemos $r(x) = 0 \ \ \forall x$
$\Rightarrow q = 0 \wedge p = -2$

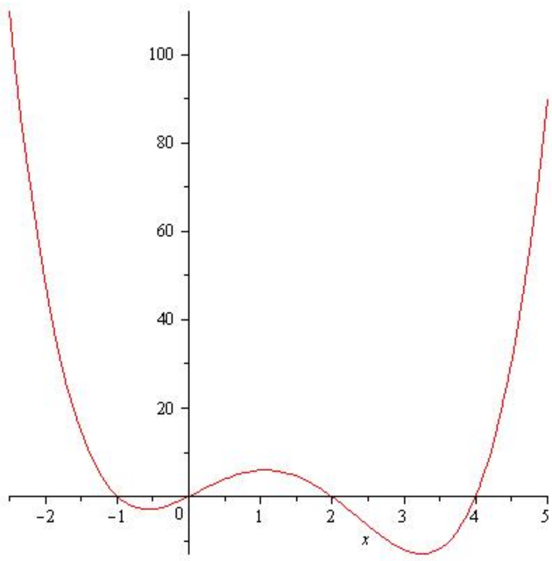
(b) Por los valores de la parte anterior tenemos

$$f(x) = x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = x(x + 1)(x^2 - 6x + 8)$$

Luego,
$f(x) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee (x + 1) = 0 \vee (x^2 - 6x + 8) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee (x + 1) = 0 \vee (x - 2)(x - 4) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 4$
Luego los ceros de $f(x)$ son $\{-1, 0, 2, 4\}$

(c)

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$
x	-	-	+	+	+
$(x + 1)$	-	+	+	+	+
$(x - 2)$	-	-	-	+	+
$(x - 4)$	-	-	-	-	+
$f(x)$	+	-	+	-	+



Problema 2

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 2^{4(x-1)}$.

(a) Bosqueje el gráfico de la función.

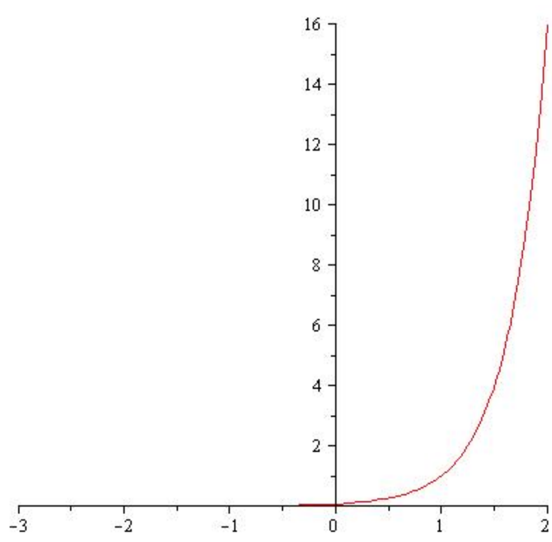
(b) Indique el dominio A y la imagen de f.

(c) Determine si f es biyectiva.

(d) En el caso que f sea biyectiva, calcule su inversa. De lo contrario, redefina $f : A' \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B'$, $B' \subseteq \mathbb{R}$. Encuentre A' y B' máximos de modo que f sea biyectiva y calcule su inversa.

Sol Prob. 2

(a)



(b) Dom(f): $\mathbb{R}$ Ima(f): $(0,\infty)$

(c) Notemos que si $x < y \Rightarrow 4(x-1) < 4(y-1) \Rightarrow 2^{4(x-1)} < 2^{4(y-1)}$, Luego $f(x)$ es estrictamente creciente y por consiguiente inyectiva.
Claramente $f(x)$ no es epiyectiva pues se tiene que la funcin 2^x es estrictamente positiva, luego basta tomar un elemento en $(-\infty, 0]$, y este no tendra pre-imagen.

(d) Tomando $A' = \mathbb{R}$ y $B' = (0,\infty)$ se tiene que $f(x)$ es biyectiva. Calculemos su inversa:

$$\begin{aligned} & y = 2^{4(x-1)} \\ \Leftrightarrow\ & ln_2(y) = 4(x-1) \\ \Leftrightarrow\ & x = \tfrac{ln_2(y)}{4} + 1 \end{aligned}$$

Luego la funcin inversa de $f(x)$ esta dada por $g : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{ln_2(x)}{4} + 1$$

Problema 3

(a) Grafique la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 2$

(b) En la figura hay dos torres verticales $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de altura h y $2h$ repectivamente. Desde lo alto de las torres se dirigen visuales hacia un punto P en el suelo, situado entre ambas. Los ángulos de depresión de P, medidos desde los puntos B y D son, respectivamente, α y β . Sabiendo que la distancia entre ambas es a, determinar la altura de las torres en función de a, α y β.

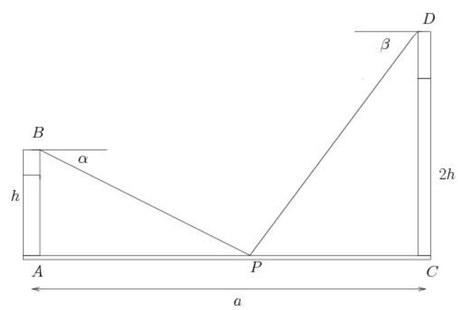
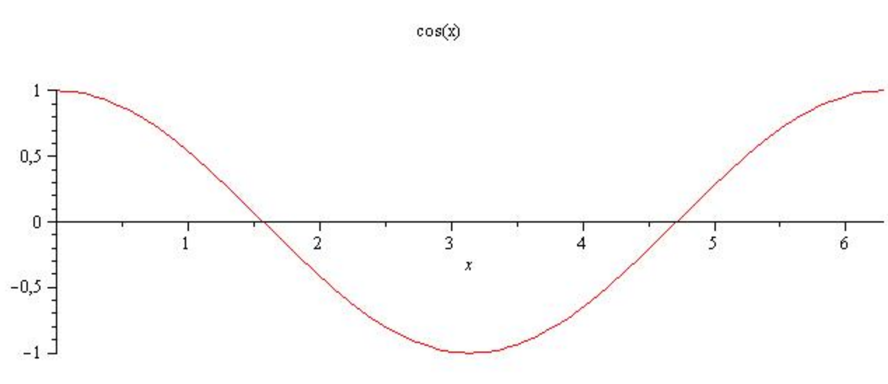
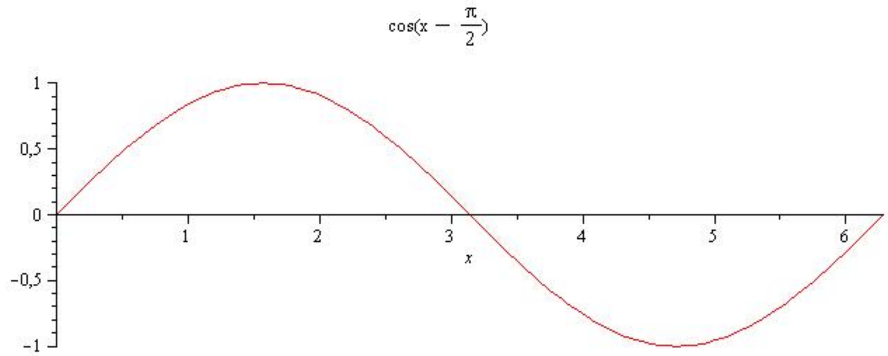


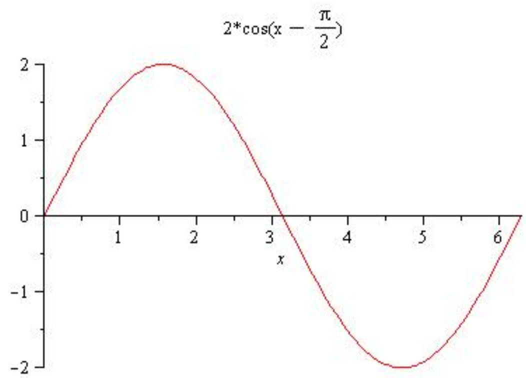
Figura 1: Dos Torres

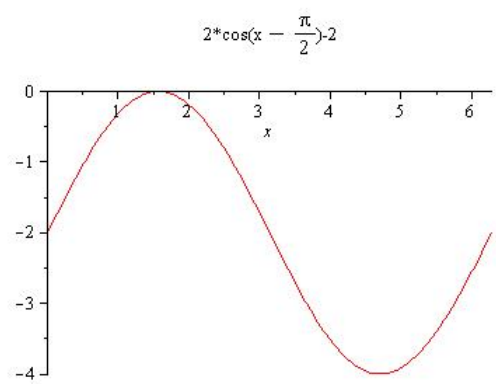
Sol Prob. 3

a









b Notemos que $tg(\alpha) = \frac{h}{\overline{AP}}$ y $tg(\beta) = \frac{2h}{\overline{AP}}$, reescribiendo estas expreciones, $2h = tg(\beta) * \overline{CP}$ y $h = tg(\alpha) * \overline{AP}$.
Dividiendo ambas expresiones, obtenemos

$$2 = \frac{tg(\beta) * \overline{CP}}{tg(\alpha) * \overline{AP}}$$

Despejando $\overline{AP}$, obtenemos

$$\overline{AP} = \frac{tg(\beta) * \overline{CP}}{2 * tg(\alpha)}$$

Ahora recordemos que $\overline{AP} + \overline{CP} = a$ y reemplazando el valor de $\overline{AP}$, tenemos que

$$\frac{tg(\beta) * \overline{CP}}{2 * tg(\alpha)} + \overline{CP} = a$$

Despejando $\overline{CP}$

$$\overline{CP} = \frac{2 * a * tg(\alpha)}{tg(\beta) + 2 * tg(\alpha)}$$

Luego la altura de la Torre de la derecha es $\frac{2*a*tg(\alpha)*tg(\beta)}{tg(\beta)+2*tg(\alpha)}$ y la altura de la torre izquierda es $\frac{a*tg(\alpha)*tg(\beta)}{tg(\beta)+2*tg(\alpha)}$