Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2007
Matemáticas II

Pauta Control 2

P1 Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

y esboce su gráfico en $[-2\pi, 2\pi]$, a partir del gráfico de $sen(x)$. Indique todas las traslaciones, escalamientos y amplificaciones, graficándolas por separado.

Solución:

- PRIMERA ETAPA: Análisis del argumento de $sen(\cdot)$:

  - Partimos con la función original:

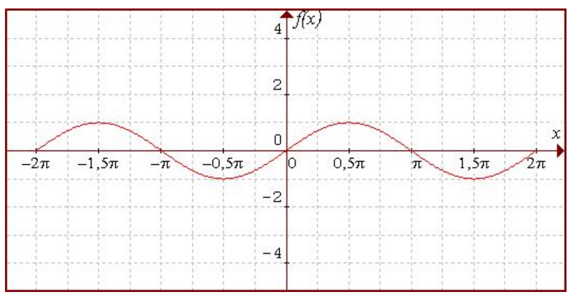

Figura 1: $f(x) = sen(x)$

  - Ponderamos por $\frac{1}{2}$ a x, por lo que el grafo se estira horizontalmente:

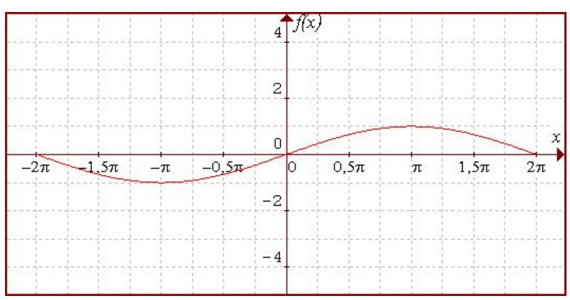

Figura 2: $f(x) = sen(\frac{x}{2})$

  - Restamos $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{x}{2}$, por lo que el grafo se traslada en π hacia la derecha:

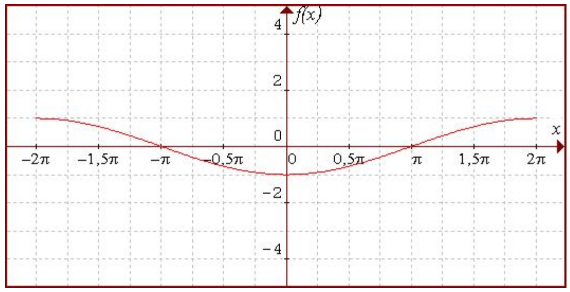

Figura 3: $f(x) = sen(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2})$

- SEGUNDA ETAPA: Análisis de la función $sen(\cdot)$:

  - Partimos con la función $sen(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2})$:

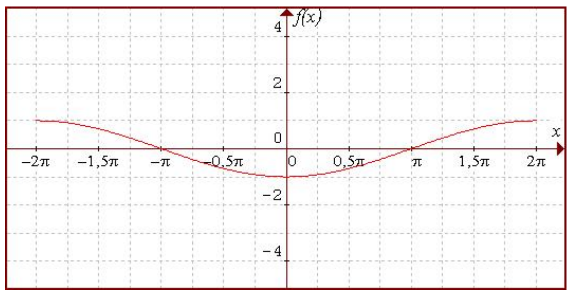

Figura 4: $f(x) = sen(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2})$

  - Ponderamos 2 a $sen(\cdot)$, por lo que el grafo se estira verticalmente:

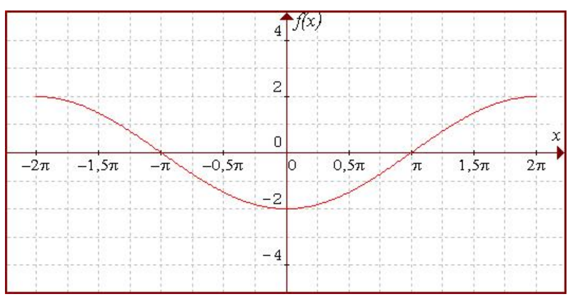

Figura 5: $f(x) = 2sen(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2})$

- Sumamos 1 a $2sen(\cdot)$, por lo que el grafo se traslada en 1 hacia arriba, obteniendo finalmente el resultado:

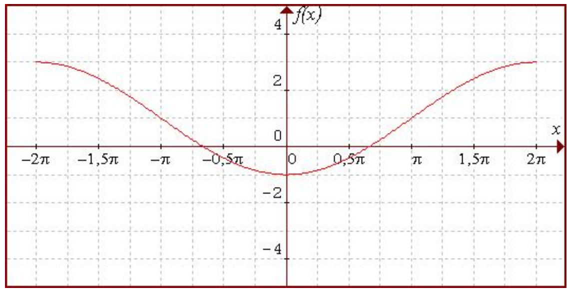

Figura 6: $f(x) = 2sen(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}) + 1$

P2 Considere las funciones $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{-x}$ y $h(x) = \frac{f(x)-g(x)}{2}$.

a) Esboce el gráfico de $f(x)$ y $g(x)$ en un mismo dibujo.

b) Estudie la paridad de $h(x)$ y su signo para $x > 0$ y para $x < 0$.

c) Demuestre que $h(x)$ es creciente sobre todo su dominio y justifique su invertibilidad.

d) Pruebe que $h^{-1}(x) = log_2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

e) Justifique que h^{-1} está bien definida sobre todo $\mathbb{R}$ y que $w(x) = log_2\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)$ no lo está.

Solución:

a) El gráfico se muestra a continuación:

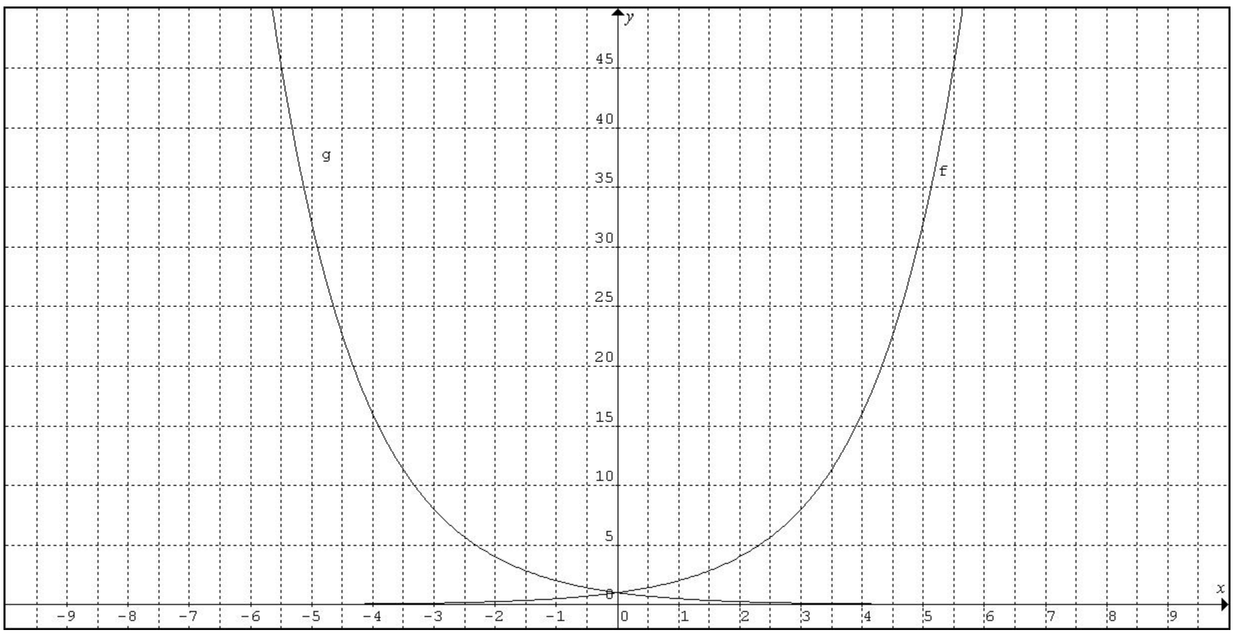

Figura 7: Gráficos de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$

b)
- **Paridad:** Recordemos que:

$$h \text{ es par} \Leftrightarrow \forall\ x\ h(-x) = h(x)$$

$$h \text{ es impar} \Leftrightarrow \forall\ x\ h(-x) = -h(x)$$

Sabemos que h puede ser o par, o impar o ninguna de las anteriores. Calculemos:

$$
\begin{aligned}
h(-x) &= \frac{2^{(-x)} - 2^{-(-x)}}{2} \\
&= \frac{2^{-x} - 2^{x)}}{2} \\
&= -\frac{2^{x} - 2^{-x)}}{2} \\
&= -h(x)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto h es una función impar.

- **Signo:**
  Veamos para $x > 0$:
  Como $x > 0$, se tiene $2^{-x} < 1 < 2^{x}$. Así, $h(x) > 0, \ \forall\ x > 0$.
  Veamos para $x < 0$:
  Como $x < 0$, se tiene $2^{x} < 1 < 2^{-x}$. Así, $h(x) < 0, \ \forall\ x < 0$.

c)

- **Dominio de h:** Como el dominio de f y g es todo $\mathbb{R}$ y además h no se indefinen ningún punto podemos decif que $dom(h) = \mathbb{R}$.
- **Crecimiento:** Sean $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$. Calculemos:

$$h(y) - h(x) = \frac{2^{y} - 2^{-y}}{2} - \frac{2^{x} - 2^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left[(2^{y} - 2^{x}) + (2^{-x} - 2^{-y})\right]$$

  Como $f(x) = 2^{x}$ es una función estrictamente creciente, entonces se tiene que $2^{y} > 2^{x}$ y $2^{-x} > 2^{-y}$, así $h(y) - h(x) > 0$.
  Así, h es una función estrictamente creciente, pues $x < y \Rightarrow h(x) < h(y)$.
- **Imagen de h:** Dado $y \in \mathbb{R}$ queremos ver si la ecuación $y = h(x)$ tiene solución en la variable x, con $x \in dom(h)$. La imagen de h son todos los puntos para los cuales la ecuación tiene solución.
  Resolvamos la ecuación $y = h(x)$:

$$
\begin{aligned}
y = h(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{2^{x} - 2^{-x}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 2y = 2^{x} - 2^{-x} \\
&\Leftrightarrow \quad 2y2^{x} = (2^{x})^{2} - 1
\end{aligned}
$$

  Considere la variable auxiliar $z = 2^{x}$. La ecuación queda:

$$z^{2} - 2yz - 1 = 0$$

  Cuyas soluciones son:

$$z_{1,2} = y \pm \sqrt{y^{2} + 1}$$

  Ahora, usando que $z = 2^{x} \Leftrightarrow x = \log_{2}(z)$ podemos decir que

$$x_{1,2} = \log_{2}(y \pm \sqrt{y^{2} + 1})$$

  Observar que la solución x existe (no se indefine) para ningún valor de $y \in \mathbb{R}$. Con esto la imagen de h es $\mathbb{R}$, pues acabamos de mostrar que todo $y \in \mathbb{R}$ posee una preimagen.
- **Invertibilidad:** Claramente la función es *epiyectiva*, pues todo elemento en $y \in \mathbb{R}$ tiene una preimagen en $dom(f)$.
  Por otro lado, como la función h es estrictamente creciente, si $x \neq y$, es claro que $h(x) \neq h(y)$.
  Por lo tanto, h es una función *inyectiva*.
  En conclusión h es una función invertible.

d) Para encontrar la fórmula para $h^{-1}(x)$, una opción es seguir los siguientes pasos:

- **Paso 1:** Escriba la ecuación $y = h(x)$
- **Paso 2:** Encuentre x en función de y.
- **Paso 3:** Reemplace x por $h^{-1}(x)$ e y por x.

Notar que la ecuación $y = h(x)$ la resolvimos en la parte anterior, luego ya sabemos que:

$$x_{1,2} = \log_2(y \pm \sqrt{y^2 + 1})$$

Así, la fórmula para la inversa queda:

$$h^{-1}(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Observar que la fórmula $\log_2(x - \sqrt{x^2 + 1})$ no tiene sentido, pues el argumento de logaritmo debe ser positivo, y en este caso no lo es, pues $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$.

e) h^{-1} está bien definida pues tanto $x^2 + 1$ como $x - \sqrt{x^2 + 1}$ son positivos, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Así, ni la raíz cuadrada ni el logaritmo se indenfinen.
En cambio $w(x) = \log_2(x - \sqrt{x^2 + 1})$ no está definida $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Para darse cuenta de esto, basta tomar un contrajemplo:
Para $x = 0$, $w(0) = \log_2(0 - \sqrt{0^2 + 1}) = \log_2(-1)$, lo que no está definido.
Con esto $w(0)$ no existe, así w no está definida $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

P3 Considere los polinomios $p(x) = ax^3 + b^2 + bx + a$, $g(x) = x - 1$, y obtenga el resto $r(x)$ que resulta de dividir $p(x)$ por $q(x)$. Establezca una condición sobre a y b para que $p(x)$ sea divisible por $(x^2 - 1)$.

Solución:

Para obtener el resto $r(x)$ debemos realizar la división $p(x) : q(x)$, la cual se hace usando el algoritmo de división de polinomios:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
 & ax^3 & + & bx^2 & + & bx & + & a & : & (x-1) & = & ax^2 + (a+b)x + (a+2b) \\
- & \underline{ax^3} & \underline{-} & \underline{ax^2} & & & & & & & & \\
 & & & (a+b)x^2 & + & bx & + & a & & & & \\
 & & - & \underline{(a+b)x^2} & \underline{-} & \underline{(a+b)x} & & & & & & \\
 & & & & & (a+2b)x & + & a & & & & \\
 & & & & - & \underline{(a+2b)x} & \underline{-} & \underline{(a+2b)} & & & & \\
 & & & & & & & 2(a+b) & & & &
\end{array}$$

Por lo tanto, hemos encontrado el resto: $r(x) = 2(a + b)$. (Notar que no depende de x).

Para establecer la condición solicitada, primero notemos lo siguiente: $(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$.
Por lo que, para que $p(x)$ 'sea divisilbe por $(x^2 - 1)$' equivale a decir que 'sea divisible por $(x - 1)(x + 1)$'.

Ya sabemos que $p(x)$ es divisible por $(x - 1) = g(x)$. Luego, para que sea divisible esta vez por $(x + 1)$ es <u>necesario</u> que el resto de la inicial división $p(x) : (x - 1)$, que habíamos llamado $r(x)$, sea cero.

Entonces,

$$r(x) = 0 \Leftrightarrow 2(a+b) = 0 \Rightarrow a = -b$$

Reemplazando, se verifica que:

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^3 - ax^2 - ax + a \\ &= a(x^3 - x^2 - x + 1) \\ &= a(x^2 - 1)(x - 1) \end{aligned}$$