Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2008
Matemáticas II

Pauta Control 2

P1 Sean

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad g : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = x^2 - 4x + 8 \quad , \quad x \mapsto g(x) = \frac{1}{x-2}$$

y la función escalonada unitaria $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que,

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si, } x \geq 0 \\ 0 & \text{si, } x < 0 \end{cases}$$

i) Grafique la función f y explique sus pasos.

ii) Determine $(f \circ U)(x)$ y grafíque.

iii) Determine $(f \circ g)(x)$ reduciendo al máximo la expresión de $(f \circ g)(x)$.

Solución:

- PRIMERA ETAPA: Escritura Apropiada de la función a graficar:

  La función original no es facil de graficar, por lo que se busca una manera más sencilla de escribirla mediante completación de cuadrados:

  $$f(x) = x^2 - 4x + 8 = (x^2 - 4x + 4) + 4 = (x-2)^2 + 4$$

- SEGUNDA ETAPA: Graficar por partes:

  Como la función posee tralaciones en el argumento, y desplazamiento en el eje vertical, haremos un gráfico por cada acción sobre la función original que sabemos graficar: $g(x) = x^2$
  En este caso, son tres acciones.

a) Partimos con la función original.

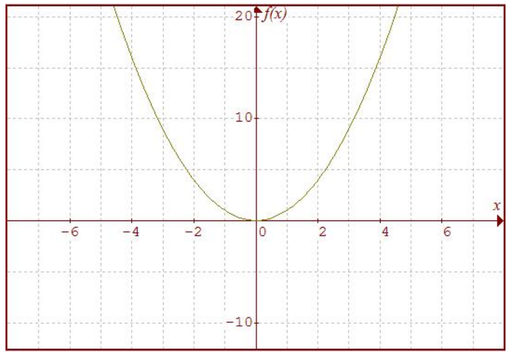

Figura 1: $f(x) = x^2$

b) Desplazamos el argumento en 2 hacia la derecha.

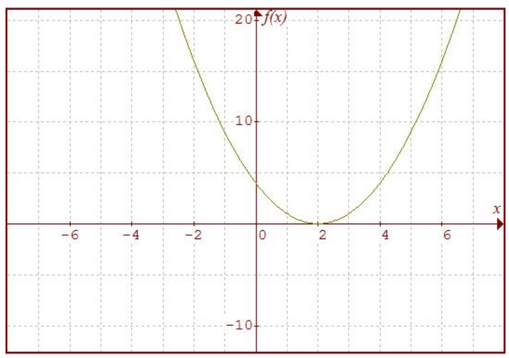

Figura 2: $f(x) = (x-2)^2$

c) Por último desplazamos verticalmente la función en 4.

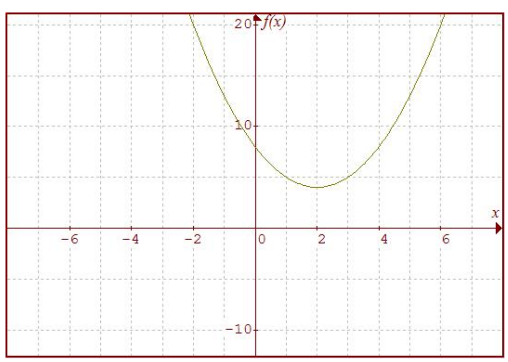

Figura 3: $f(x) = (x-2)^2 + 4$

ii) Para encontrar $f \circ U$ primero hay que analizar el dominio y recorrido de esta función. Después para escribir su forma explícita, basta con aplicar la definición de composición de funciones.

Notemos que $Dom(U) = \mathbb{R}$, $\quad Im(U) = 0 \cup 1$; $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $\quad Im(f) = [4, +\infty)$.
Dado lo anterior, es válida la composición, puesto que $Im(U) \subseteq Dom(f)$.
Con esto:

$Dom(f \circ U) = Dom(U) = \mathbb{R}$, $Im(f \circ U) = f(Im(U)) = f(0,1)$. y así podemos escribir: $f \circ U : \mathbb{R} \rightarrow f(0), f(1)$

Por otro lado, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$(f \circ U)(x) = f(U(x)) = \begin{cases} f(1) & \text{si } x >= 0 \\ f(0) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Pero

$$f(1) = (1^2 - 4 \cdot (1) + 8) = 1 - 4 + 8 = 5$$
$$f(0) = (0^2 - 4 \cdot (0) + 8) = 0 - 0 + 8 = 8$$

Así,

$$(f \circ U)(x) = f(U(x)) = \begin{cases} 5 & \text{si } x >= 0 \\ 8 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

A continuación se presenta el gráfico.

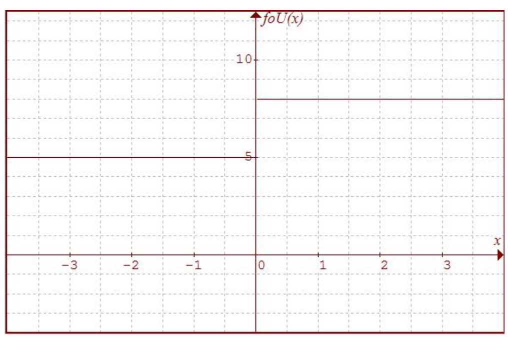

Figura 4: $f \circ U$

iii) Hacemos lo mismo que en ii),

Notamos que $Dom(g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\quad Im(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $\quad Im(f) = [4, +\infty)$.
Dado lo anterior,solo es válida la composición en: $Im(g) \cap Dom(f) = \mathbb{R}$.
Con esto:

$Dom(f \circ g) = Dom(g) = \mathbb{R} \backslash \{2\}, Im(f \circ g) = f(\mathbb{R} \backslash \{0\}),$ y así podemos escribir: $f \circ g : \mathbb{R} \backslash \{2\} \to [4, +\infty) \backslash \{8\}$

Además,

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} : \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= \left(\frac{1}{x-2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{x-2}\right) + 8 \\
&= \left[\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{4}{(x-2)} + 8\right] \\
&= \left[\frac{1 - 4 \cdot (x-2) + 8 \cdot (x-2)^2}{(x-2)^2}\right] \\
&= \left[\frac{1 - 4x + 8 + 8 \cdot (x^2 - 4x + 4)}{(x-2)^2}\right] \\
&= \left[\frac{1 - 4x + 8 + 8 \cdot (x^2 - 4x + 4)}{(x-2)^2}\right] \\
&= \left[\frac{8x^2 - (4 + 32) \cdot x + (1 + 8 + 32)}{(x-2)^2}\right] \\
&= \left[\frac{8x^2 - 36x + 41}{x^2 - 4x + 4}\right]
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{P2}}$ Dada la función

$$\begin{array}{rcl} f : A \subseteq \mathbb{R} & \to & B \subseteq \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \sqrt{x^2 - 9} \end{array}$$

i) Determine el máximo conjunto A donde f es función y el conjunto B de modo que f sea biyectiva.

ii) Determine la función inversa de f.

iii) Grafíque ambas funciones.

Solución:

i)

- **Elección de** A: Primero calculemos el dominio de f.
  Para que la función esté bien definida el argumento de la raíz debe ser positivo o cero, en otras palabras se debe cumplir:

  $$x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 9 \Leftrightarrow |x| \geq 3$$

  Luego,

  $$\begin{aligned} dom(f) &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x| \geq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq -3 \ \vee \ 3 \leq x\} \\ &= (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \end{aligned}$$

  Debemos elegir A de manera de que f sea una función inyectiva.
  Notemos que, para $x \in dom(f)$, $f(x) = f(-x)$, luego la función no es inyectiva en $dom(f)$.
  Por otro lado, consideremos $A = [3, +\infty)$[1].
  En A, f es un función estrictamente creciente, pues si $x > y$, entonces es claro que $f(x) > f(y)$. Con esto podemos decir que, en A, la función f es inyectiva.
- **Elección de** B: Para que f sea epiyectiva debemos considerar en B todos los elementos y que tengan alguna preimagen $x \in A$, es decir, queremos que $y \in B \Leftrightarrow \exists\ x \in A \ : \ f(x) = y$.
  Para saber cuáles son elementos de B debemos resolver la ecuación $f(x) = y$, en la variable x. Los elementos de B serán todos los y tales que la ecuación tiene una solución $x \in A$.
  Como la ecuación es $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 9} = y$, para ningún $y < 0$ existe solución, luego descartamos que B posea elementos negativos. Ahora para $y \geq 0$ podemos despejar:

  $$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 9} = y \\ &\Leftrightarrow x^2 - 9 = y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 = y^2 + 9 \end{aligned}$$

  Es decir, $x = \pm\sqrt{y^2 + 9}$, que está bien definido $\forall\ y \geq 0$, pues $y^2 + 9 \geq 0$ (o sea la raíz no se indefine!!).
  Pero como queremos $x \in A$, descartamos la solución negativa.
  Hemos probado que, $\forall\ y \geq 0$ existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$
  Resumen, para que f sea epiyectiva se debe tener que $B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0\} = [0, +\infty)$
- **Conclusión:** Los conjuntos A y B más grandes que permiten que f sea biyectiva son $A = [3, +\infty)$ y $B = [0, +\infty)$[2].

[1] También podríamos haber definido $A = (-\infty, -3]$. En este caso los razonamientos son análogos

[2] También se pueden escoger $A = (-\infty, -3]$ y $B = [0, +\infty)$.

ii) Para encontrar la fórmula para $f^{-1}(x)$, una opción es seguir los siguientes pasos:

- **Paso 1:** Escriba la ecuación $y = f(x)$
- **Paso 2:** Encuentre x en función de y.
- **Paso 3:** Reemplace x por $f^{-1}(x)$ e y por x.

Notar que la ecuación $y = f(x)$ la resolvimos en la parte anterior, luego ya sabemos que:

$$x = \sqrt{y^2 + 9}$$

Así, la fórmula para la inversa queda:

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 9}$$

iii) Los gráficos se muestran a continuación:

Figura 5: Gráfico de $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

Figura 6: Gráfico de $f^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

$\boxed{\textbf{P3}}$ Considere las funciones f y g definidas por:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \quad , \qquad & g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) &= \frac{3^x - 3^{-x}}{2} \quad , & x \mapsto g(x) &= \frac{3^x + 3^{-x}}{2} \end{aligned}$$

i) Haga un estudio para determinar si alguna de las funciones (f y g) es par o impar .

Nota: Recuerde que una función es par si $f(-x) = f(x)$; y que es impar si $f(-x) = -f(x)$, con x en el dominio de f.

ii) Encuentre la inversa de f y justifique porqué f^{-1} está bien definida.

Indicación: Le podría ser útil definir la variable auxiliar $z = 3^x$.

iii) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$(g(x))^2 - (f(x))^2 = 1$$

Solución:

i) De la nota sale que nuestro interés está en analizar $f(-x)$ y compararlo con $f(x)$, (lo mismo con $g(x)$ y $g(-x)$), entonces:

- Paridad de $f(\cdot)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{3^{-x} - 3^{-(-x)}}{2} \\ &= \frac{3^{-x} - 3^x}{2} \\ &= -\frac{3^x - 3^{-x}}{2} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

  Luego por definición, $f(\cdot)$ es *impar.*

- Paridad de $g(\cdot)$:

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{3^{-x} + 3^{-(-x)}}{2} \\ &= \frac{3^{-x} + 3^x}{2} \\ &= \frac{3^x + 3^{-x}}{2} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

  Nuevamente, por definición, $g(\cdot)$ es *par.*

ii) Para encontrar la inversa de $f(\cdot)$, existe un metódo estándar:

a) Se iguala la variable auxiliar y con $f(x)$.

b) Se despeja x en función de y mediante álgebra, obteniendo una función h

$$x = h(y)$$

c) La función inversa $f^{-1}(\cdot)$ está descrita por la ecuación:

$$f^{-1}(y) = x = h(y)$$

Aplicando lo anterior, queda:

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3^x - 3^{-x}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2y = 3^x - 3^{-x} = 3^x - \frac{1}{3^x} \tag{1}$$

Con ayuda de la variable auxiliar $z = 3^x$,reemplzamos en (1):

$$\begin{align} 2y = z - \frac{1}{z} \quad &\Leftrightarrow \tag{2}\\ 2y = \frac{z^2 - 1}{z} \quad &\Leftrightarrow \tag{3}\\ 2yz = z^2 - 1 \quad &\Leftrightarrow \tag{4}\\ 0 = z^2 - 2yz - 1 & \tag{5}\end{align}$$

Notar que las igualdades (2) y (3) están bien definidas, pues $z \neq 0$.
Finalmente obtenemos de la igualdad (5) una ecuación cuadrática que resolvemos sobre z.

$$\begin{align} z_{1,2} &= \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4(-1)(1)}}{2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} \\ &= \frac{2y \pm \sqrt{4(y^2+1)}}{2} = \frac{2y}{2} \pm \frac{2\sqrt{y^2+1}}{2} \\ &= y \pm \sqrt{y^2+1} \tag{6}\end{align}$$

Ahora reemplazamos la variable auxiliar z en (6):

$$\begin{align} 3^x = y \pm \sqrt{y^2+1} &\Leftrightarrow \exp(x \ln 3) = y \pm \sqrt{y^2+1} \\ \Rightarrow x \ln 3 = \ln(y \pm \sqrt{y^2+1}) &\text{ expresión que solo tiene sentido cuando } y \pm \sqrt{y^2+1} > 0. \tag{7}\\ \Rightarrow x = h(y) = \frac{1}{\ln 3} &\cdot \ln(y \pm \sqrt{y^2+1}) \tag{8}\end{align}$$

Luego, por el desarrollo anterior (ecuaciones (7) y (8)), el único problema de indefinición de f^{-1}, sería que el argumento de $ln(\cdot)$ sea negativo. Esto es, que $y \pm \sqrt{y^2+1} < 0$.

Pero notando que,

$$\forall y \in \mathbb{R} : y^2 + 1 > y^2, \text{ se tiene que } \sqrt{y^2+1} > |y|$$

deducimos que :

$$\forall y \in \mathbb{R} : 0 > y - \sqrt{y^2+1}$$

Por lo tanto, descartamos la solución $z_2 = y - \sqrt{y^2+1}$ y nos quedamos con $z_1 = y + \sqrt{y^2+1}$

De esta forma encontramos la función inversa de f, dada por:

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{\ln 3} \cdot \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

iii) Para demostrar la igualdad, basta con reemplazar las funciones $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ y calcular:
Sea $x \in \mathbb{R}$,cualquiera

$$\begin{aligned}
(g(x))^2 - (f(x))^2 &= \left(\frac{3^x + 3^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3^x - 3^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[(3^x)^2 + 2 \cdot (3^x) \cdot (3^{-x}) + (3^{-x})^2\right] - \frac{1}{4}\left[(3^x)^2 - 2 \cdot (3^x) \cdot (3^{-x}) + (3^{-x})^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(3^{2x} + 2 \cdot 1 + 3^{-2x}) - (3^{2x} - 2 \cdot 1 + 3^{-2x})\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(3^{2x} - 3^{2x}) + (3^{-2x} - 3^{-2x}) + 2 - (-2)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[0 + 0 + (2+2)\right] \\
&= \frac{4}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$