Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Verano 2008
Matemáticas II

Pauta Control 1

P1 Sean A y B conjuntos. Pruebe que $A\Delta B = A^c\Delta B^c$.

Recuerde que $A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$.

Solución:

$$\begin{array}{rcll}
A\Delta B & = & (A\cup B)\backslash(A\cap B) & \leftarrow \text{ Usando la propiedad que nos recuerda el enunciado}\\
& = & (A\cup B)\cap(A\cap B)^c & \leftarrow \text{ Definición: } C\backslash D = C\cap D^c\\
& = & (A\cap B)^c\cap(A\cup B) & \leftarrow \text{ Conmutatividad de la intersección}\\
& = & (A^c\cup B^c)\cap(A\cup B) & \leftarrow \text{ Ley de De Morgan}\\
& = & (A^c\cup B^c)\cap(A^c\cap B^c)^c & \leftarrow \text{ Ley de De Morgan y recordando que } (D^c)^c = D\\
& = & (A^c\cup B^c)\backslash(A^c\cap B^c) & \leftarrow \text{ Definición: } C\cap D^c = C\backslash D\\
& = & A^c\Delta B^c & \leftarrow \text{ Propiedad que recuerda el enunciado}
\end{array}$$

P2 Demuestre que para todo entero $n \geq 1$ se tiene que $n^2 + 13n + 6$ es un número par.

Recuerde que puede usar inducción.

Solución:

Lo demostraremos usando inducción. La función proposicional es: $p(n) = n^2{+}13n{+}6$ *es un número par* , luego lo que queremos demostrar es:

$$\forall n \geq 1 \quad p(n)$$

Veamos primero el caso base, es decir que se cumple p(1).

Notemos que $1^2 + 13\cdot 1 + 6 = 20$. Como 20 es un número par (ya que es múltiplo de 2) hemos verificado que se cumple al caso base.

Nos queda verificar el paso inductivo, es decir que $\forall n \geq 1 \quad p(n) \Longrightarrow p(n+1)$. En otras palabras:

$$\forall n \geq 1 \quad n^2 + 13n + 6 \textit{ es un número par } \Longrightarrow (n+1)^2 + 13(n+1) + 6 \textit{ es un número par}$$

Sea $n \geq 1$. Nuestra hipótesis de inducción es que $n^2 + 13n + 6$ *es un número par* , la cual la traduciremos en que $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $n^2 + 13n + 6 = 2k$.

Notar que:

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 + 13(n+1) + 6 &= n^2 + 2n + 1 + 13n + 13 + 6 \\
&= n^2 + 13n + 6 + 2n + 14 \\
&= \underbrace{n^2 + 13n + 6}_{=2k \ \ (Hip\ Ind)} + 2(n+7) \\
&= 2k + 2(n+7) \\
&= 2(k + n + 7)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $(n+1)^2 + 13(n+1) + 6 = 2(k+n+7)$. Como $k+n+7$ es la suma de tres números enteros, se tiene que lo anterior es equivalente a $\exists w \in \mathbb{Z}$ tal que $(n+1)^2 + 13(n+1) + 6 = 2w$, lo que quiere decir que $(n+1)^2 + 13(n+1) + 6$ es un número par.

P3 En el reino de Beaucheff un hombre se encuentra con 3 personas A, B y C. Se sabe que uno de ellos es un caballero otro un espía y el tercero un ladrón. Además el ladrón siempre miente el caballero nunca miente y el espía a veces miente y a veces dice la verdad.

Al interrogarlos estos contestan lo siguiente. A dice *"C es un ladrón"*, B dice *"A es un caballero"* y C dice *"Yo soy un espía"*.

Muestre con argumentos lógicos válidos que existe una sola posibilidad para quien es el caballero, el ladrón y el espía y determínela.

Solución:

Lo primero que haremos es determinar quien es el caballero. Notar que dada la premisa que el caballero siempre dice la verdad, ni B ni C pueden ser el caballero. Si B fuera el caballero sería verdadero que "A es un caballero", contradiciendo la existencia de un único caballero. Si C fuera el caballero, al decir "Yo soy un espía" estaría mintiendo, acción totalmente repudiada por su condición de caballero.

Luego únicamente A puede ser el caballero. Como A siempre dice la verdad, C tiene que ser el ladrón. Por descarte B es el espía (y lo que dice es verdadero, lo cual es acorde a la premisa que el espía a veces miente y a veces dice la verdad)