ESCUELA DE VERANO - MATEMÁTICAS II - Enero 2009

Profesores: Raúl URIBE, Pierre Paul ROMAGNOLI,
Leonardo SÁNCHEZ, José ZAMORA

Pauta Control # 2

Problema 1.- Demuestre las siguientes propiedades de conjuntos:

(a) Si $A^c \subseteq A$ entonces $A^c = \phi$. ¿Es cierta la recíproca?.

(b) $A \subseteq (B\backslash C)^c \Leftrightarrow A \cap B \subseteq C$.

Sol:

(a) Sea $x \in A^c$ por hipótesis entonces $x \in A$ pero $x \in A^c$ implica que $x \notin A$ lo que es una contradicción **(0.25 puntos)**. Por lo tanto nunca se tiene $x \in A$, es decir $A^c = \phi$ **(0.25 puntos)**.

La recíproca es cierta puesto que $\phi \subseteq A$ es cierto **(0.5 puntos)**.

(b) ($\Rightarrow$) Se tiene que $A \subseteq (B\backslash C)^c = B^c \cup C$ **(0.25 puntos)**. Al intersectar con B tenemos $A \cap B \subseteq (B^c \cup C) \cap B = B \cap C \subseteq C$ **(0.25 puntos)**.

($\Leftarrow$) Se asume que $A \cap B \subseteq C$. Como $A = (A\backslash B) \cup (A \cap B)$ **(0.25 puntos)** entonces $A \subseteq (A\backslash B) \cup C \subseteq B^c \cup C = (B\backslash C)^c$ **(0.25 puntos)** .

$\square$

Problema 2.- Pruebe por inducción que:

(a) En un juego de cartas se tienen fichas con el número 2 y otras con el número 5. Muestre que cualquier cantidad $n \geq 4$ se puede armar utilizando estas fichas. Por ejemplo $4 = 2 + 2{,}5 = 5{,}6 = 2 + 2 + 2$.

(b) $\sum_{i=1}^{n}(i + 1)2^i = n2^{n+1}$

Sol:

(a) Como $4 = 2 + 2$ Es cierto para $n = 4$ **(0.25 puntos)**.
Se asume para n es decir $n = 2a + 5b$ con $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$ **(0.25 puntos)**.

Si $a \geq 2$ entonces $2(a - 2) + 5(b + 1) = \overbrace{2a + 5b}^{n} + 5 - 4 = n + 1$ **(0.25 puntos)**.

Si $a < 2$ entonces $b > 1$ y $2(a + 3) + 5(b - 1) = \overbrace{2a + 5b}^{n} + 6 - 5 = n + 1$ **(0.25 puntos)**.

(b) Para $n = 1$ es cierto porque $(1 + 1)2 = 4 = 1 \cdot 2^2$ **(0.25 puntos)**.
Se Asume que $\sum_{i=1}^{n}(i + 1)2^i = n2^{n+1}$ **(0.25 puntos)** y entonces

$$\sum_{i=1}^{n+1}(i + 1)2^i = \overbrace{\sum_{i=1}^{n}(i + 1)2^i}^{n2^{n+1}} + (n + 2)2^{n+1} = 2(n + 1)2^{n+1} = (n + 1)2^{n+2}$$

(0.5 puntos)

$\square$

Problema 3.- De una fórmula explícita para la sumatoria $\sum_{i=n+1}^{2n} 2i$.

Sol: Dos maneras:

$$\sum_{i=n+1}^{2n} 2i = 2\left(\sum_{i=1}^{2n} i - \sum_{i=1}^{n} i\right) = 2\left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}\right) = n(3n+1).$$

$$\sum_{i=n+1}^{2n} 2i = 2\sum_{i=1}^{n}(i+n) = 2\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} n\right) = 2\left(\frac{n(n+1)}{2} + n^2\right) = n(3n+1).$$

$\square$