ESCUELA DE VERANO 2009 - MATEMÁTICAS I

Profesores: Adriana Piazza, Felipe Celery, Axel Osses, Juan Peypouquet.

GUÍA #3 : Matrices

Problema 1. Dados los siguientes pares de matrices, encontrar $A+B$ y $A-B$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -14 & 12 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} -12 & 9 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -d & c \\ 1 & e \end{pmatrix}$

Problema 2.

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

Determine:

1. $A+B$
2. $A+C$
3. $A-B$
4. $3A+2B$
5. $4A-3B+2C$
6. $2A+B+0C$
7. $det(A)$
8. $det(B)$
9. $det(C)$

Problema 3.

Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Encuentre la matriz D tal que $A+2B-C+D=0$

Problema 4. Escribir en forma matricial, es decir, de la forma $A \cdot X = B$, los siguientes sistemas de ecuaciones:

$a)$ $\begin{aligned} x+y&=0 \\ x-y&=5 \end{aligned}$ $b)$ $\begin{aligned} 2x+8y&=0 \\ -x-y&=1 \end{aligned}$ $c)$ $\begin{aligned} -3y-x-1&=0 \\ 2y+x-8&=2 \end{aligned}$

Problema 5. Escriba cada ecuación matricial como un sistema de ecuaciones lineales:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -53 & 2 \\ 29 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 18 \end{pmatrix}$

Problema 6. Encuentre la matriz $A \cdot B$ para cada una de las matrices del problema 1.

Problema 7. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calcule $A \cdot B$ y $B \cdot A$.
2. Calcule $C \cdot D$ y $D \cdot C$.
3. ¿Es $A \cdot B = B \cdot A$?
4. ¿Es $C \cdot D = D \cdot C$?

Problema 8. Pruebe que la suma de dos matrices diagonales del mismo tamaño es una matriz diagonal.

Problema 9. Pruebe que cualquier múltiplo escalar de una matriz diagonal es una matriz diagonal.

Problema 10. Determine cuales de las matrices siguientes son simétricas
$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 11. Demuestre que si A, B son simétricas, $A+B$, $A \cdot B$ y αA también son simétricas.

Problema 12. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Encuentre A^2 y A^3.
2. Encuentre una expresión para A^k donde k es un entero positivo, en términos de k.

Problema 13. Sea A una matriz de 2×2. Si $A^2 = 0_{2\times 2}$, determine si $A = 0_{2\times 2}$. Explique.

Problema 14. Sea A una matriz de 2×2 y sea $I = I_2$. Pruebe que:

1. $(A + 4I)^2 = A^2 + 8A + 16I$
2. $A^2 + 7A + 12I = (A + 3I) \cdot (A + 4I)$

Problema 15. Sea A una matriz y $\vec{x}$ un vector definidos por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcule las matrices $A^2 = A \cdot A$ y $A^3 = A \cdot A \cdot A$.
2. Calcule los vectores $\vec{x}, A\vec{x}$, $A^2\vec{x}$ y $A^3\vec{x}$. Dibuje estos vectores en el plano.
3. Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule el valor del escalar λ para que

$$\lambda B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 16. Pruebe que si A es una matriz 2×2 tal que $B \cdot A = A \cdot B$ para toda matriz B de 2×2, entonces $A = cI_2$ para algún escalar c

Sugerencias: Considere que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Comience por escribir la igualdad $A \cdot B = B \cdot A$ en el caso particular en que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Proceda igual con $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema 17.

1. Encuentre matrices A y B de 2×2 tales que $A^2 - B^2 \neq (A - B) \cdot (A + B)$.
2. Calcule $(A - B) \cdot (A + B)$ usando la ley distributiva.
3. Use lo anterior, para determinar en qué caso se cumple $A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$.

Problema 18. Encuentre una matriz A de 2×2 tal que $A^2 = -I_2$

Problema 19. Una matriz triangular superior es una matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$.

1. Encuentre D tal que $A + D = 0$ y compruebe que D es triangular superior.
2. Si A y B son triangulares superiores. Compruebe que $A \cdot B$ es triangular superior.
3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demuestre que su matriz inversa es triangular superior. Para ello, encuentre B tal que $A \cdot B = I$, y pruebe que B es triangular superior.

Problema 20. La matriz A de 2×2 verifica

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1. Calcule $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ observando que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule B^{-1}.

3. Sabiendo que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, calcule A usando B^{-1}.

Problema 21. Una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es mágica si

$$a + b = c + d = a + c = b + d.$$

A la suma constante se le llama número mágico de la matriz $m(A)$.

Por ejemplo, la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es mágica y tiene número mágico $m(I) = 1$.

i) Demuestre que la suma de matrices mágicas en mágica y que

$$m(A + B) = m(A) + m(B).$$

ii) Demuestre que el producto de matrices mágicas es una matriz mágica y que

$$m(AB) = m(A)m(B).$$

iii) Demuestre que una matriz mágica debe ser de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Problema 22. Encuentre todas las matrices de 2×2 que satisfacen la relación $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. De algunos ejemplos.

Problema 23. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calcule $det(A)$, $det(A + I)$, $det(A + 2I)$.
2. Calcule $det(A + \lambda I)$ en términos de λ y encuentre todos los valores de λ tales que $det(A + \lambda I) = 0$. Escriba las matrices $A + \lambda I$ resultantes.

Problema 24. Sea P una matriz invertible y sea D una matriz diagonal. Se define la matriz A como:

$$A = P^{-1} \cdot D \cdot P$$

1. Usando las propiedades del producto de matrices y de la matriz inversa, determine en la forma más simplificada posible A^2 y A^3.

   Si las matrices P y D tienen los siguiente valores:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Calcule P^{-1}.

3. Calcule D^2, D^3, A^2 y A^3.

Problema 25. Para una matriz de 2×2, se define su traza mediante la relación:

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d.$$

Estudie si son o no verdaderas las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A+B) &= \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \\ \operatorname{tr}(AB) &= \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(B) \\ \operatorname{tr}(AB) &= \operatorname{tr}(BA) \end{aligned}$$

Indicación: Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$*. Calcule ambos lados de las igualdades correspondientes y verifique si se obtiene o no lo mismo.*

Problema 26. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 6y & + & 8z & = 4 \\ 4x & + & 3y & + & 4z & = 8 \\ x & + & y & + & z & = 3 \end{array}$$

1. Escriba el sistema en forma matricial.

2. Usando el "método de Gauss" transforme el sistema en uno triangular superior.

3. Resuelva el sistema usando sustituciónes hacia atrás.

Problema 27. En este problema, diremos que una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es *0-diagonal* si cumple $a + d = 0$.

1. Compruebe que si A y B son matrices *0-diagonal*es, entonces $A + B$ y λA también son *0-diagonales.*

2. Si A y B son matrices *0-diagonales* invertibles, estudie si A^{-1} y AB son o no matrices *0-diagonales.*

3. Encuentre α, β y γ de modo que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & \gamma \end{pmatrix}$ y su producto sean *0-diagonales.*

Desafío

Problema 28. ✠*Fibonacci y el número aúreo.* La sucesión de números de Fibonacci está dada por $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ y se calcula como:

$$\begin{aligned} F_1 &= 0, \\ F_2 &= 1 \\ F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + 0 = 1, \\ F_4 &= F_3 + F_2 = 1 + 1 = 2, \\ F_5 &= F_4 + F_3 = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Así sucesivamente, se obtiene que

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Además, el número aúreo $\phi = 1{,}618...$ satisface la relación

$$1 + \phi = \phi^2.$$

1. Verifique que

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

   y que por lo tanto para $n \geq 1$:

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Pruebe las identidades:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\phi^2} \begin{pmatrix} \phi & 1 \\ 1 & -\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & 1-\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi & 1 \\ 1 & -\phi \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{1+\phi^2} \begin{pmatrix} \phi & 1 \\ 1 & -\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi^n & 0 \\ 0 & (1-\phi)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi & 1 \\ 1 & -\phi \end{pmatrix}.$$

3. Concluya que

$$F_n = \frac{\phi^n - \phi(1-\phi)^{n-1}}{1+\phi^2}.$$